TRATADO

DE

GEOMETRIA ELEMENTAL

POR

P. José Epping, S. J.

PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN LA ESCUELA POLITÉCNICA
DE QUITO.

PARTE PRIMERA

GEOMETRIA PLANA.

QUITO.

IMPRENTA NACIONAL.

1873.

PROLOGO.

El fin que me he propuesto al escribir el presente tratado de Geometría elemental no ha sido otro que el de formar un breve compendio, que sirva de guia en la enseñanza de dicha ciencia, y así he consultado la brevedad en los razonamientos, dejando siempre lugar á la esplicacion del profesor. Este método me ha parecido preferible ya para dejar á los profesores mayor libertad, ya tambien para que los discípulos se fijen mas en sus esplicaciones, y tengan que aplicarlas al texto cuando hagan su estudio particular. Así se evita de camino el que se habitúen los jóvenes á estudiar solo de memoria sin ejercicio alguno del entendimiento, lo cual impide el desarrollo de este, y es contra el fin lógico del cultivo de tan importante ciencia. No se crea sinembargo que la brevedad que he consultado, haya llegado á separarme del camino que Euclides trazára; nada ménos que eso; ante todo he procurado la exactitud y precision en las demostraciones y el riguroso enlace doctrinal de ellas, junto con la buena disposicion y mas conveniente órden de los diferentes tratados ó partes de la obra. Este rigor demostrativo nos ha obligado á separarnos del método comun en la teoría de las paralelas (*) y en la de las relaciones entre dos circunferencias.

Los ejercicios ó problemas colocados al fin deberán irse resolviendo despues de aquellos capítulos con quienes dicen relacion, siendo este trabajo de la mayor importancia. En primer lugar servirá mucho para que se grave en el ánimo de los jóvenes la doctrina del texto, y en segundo llegará á hacerles ameno é interesante el estudio de las Matemáticas.

(*) Partiendo de la definicion de las paralelas dada por Euclides nunca se demostrará su célebre postulado, pues una proposicion negativa no puede conducir por sí á conclusiones positivas.

Pero hay en ello otra ventaja que es superior á las anteriores: la de desarrollar de tal manera la inteligencia de los alumnos, que les haga adquirir el talento de invencion, mediante el cual sabrán aplicar los principios de la ciencia á la solucion de sus cuestiones prácticas, relacionando con conveniencia de órden las ideas adquiridas, infiriendo de ellas otras y disponiéndose tambien para hacer ulteriores adelantos si han de proseguir en el estudio de las ciencias Matemáticas.

Deseando que no se malogre el cuidado que en beneficio de la juventud he puesto en la formacion de este libro, no dejaré de recomendar á los profesores cuanto contribuye una prudente severidad en los exámenes de los alumnos á la mas sólida instruccion de estos y á sus verdaderos progresos, toda vez que el acceso á clases superiores nunca llegue á permitirse miéntras no se encuentren radicados en las materias que les sirven de fundamento.

Antes de poner término á esta introduccion debo cumplir con un deber de gratitud; dando las mas espresivas gracias al P. Cappa por la bondadosa cooperacion que me ha prestado á fin de que el estilo y lenguaje de esta obra sea cual conviene al objeto de la misma.

Quito, octubre 30 de 1873.

EL AUTOR.

INTRODUCCION.

I. Nociones fundamentales.

El objeto de la Geometría es manifestar las propiedades de la cantidad extensa.—La extension completa que primeramente se nos representa, es el cuerpo con sus tres dimensiones, largo, ancho y grueso; es decir con todas las dimensiones posibles.

Si en un cuerpo físico cualquiera, hacemos abstraccion de la materia, tendremos el cuerpo geométrico con solo las tres dimensiones, longitud, latitud y altura (ó profundidad). Si en el cuerpo geométrico consideramos solo sus límites, tendremos el concepto de las superficies; estas, por tanto, tienen dos solas dimensiones. Los límites de las superficies se llaman líneas, y solo tienen longitud.

Los límites de las líneas son puntos, y no tienen dimension alguna, sino solamente dicen relaciones á las cantidades extensas y entre sí; y por eso se pueden llamar cantidades en sentido analógico.

Aunque en los cuerpos se pueden representar muchas infinitas superficies, no se componen sinembargo de estas: lo mismo debe entenderse de las superficies respecto de las líneas, y de estas respecto de los puntos. Declarado con esto el objeto material, pasemos al formal, que es la investigacion científica de las propiedades y relaciones de las figuras geométricas y se refieren á la forma, magnitud y situacion.

Aunque la Geometría, es verdad, tiene por propiedades fundamentales las que á todo entendimiento desarrollado son patentes, no obstante convendrá dar de ellas definiciones claras y distintas, para que, como las demas ciencias, tenga un fundamento sólido y fijo.

1° Llamamos cuerpo geométrico al que tiene tres extensiones, largo, ancho y grueso, ó longitud latitud y altura.

2° La superficie tiene solamente dos extensiones, longitud y latitud.

3° La línea tiene una sola extension, longitud.

4° El punto no tiene extension alguna, puesto que es el límite de la línea, luego es un ser relativo para determinar el lugar.

5º Cada direccion está determinada por dos puntos, y dice un respecto directo é inmediato entre aquellos.

6º La línea recta tiene en toda su extension una sola direccion luego la direccion y la recta son conceptos objetivamente idénticos.

Cor. 1. Entre dos puntos hay una sola recta posible, puesto que una sola es la direccion.

Cor. 2. Si dos rectas tienen dos puntos ó una parte comun, son idénticas, luego dos rectas pueden cortarse en un solo punto.

Cor. 3. La recta es el camino mas corto entre dos puntos.

Explicacion. La recta entre dos puntos dice un respecto directo é inmediato ó la union inmediata y directa de aquellos, luego dice la distancia mas corta; y por eso todas las otras líneas que no tienen una sola direccion, forman entre dos puntos un camino mas largo que la recta.

7º Línea curva es aquella que no tiene parte alguna recta, y el orígen de aquella se puede representar por un punto que se mueve continuamente en otra direccion.

8º La línea compuesta de rectas y curvas se llama mista.

9º La superficie plana ó el plano tiene esta propiedad distintiva, que todas las líneas rectas, que unen dos puntos cualesquiera, están segun toda su extension en esta superficie. Como la recta es la extension mas sencilla del órden primero, así el plano la del órden segundo, y por eso su extension es en todas partes la misma y en el mismo sentido.

10º Superficie curva es la que no tiene ninguna parte plana y su orígen se puede representar por una línea sea recta ó curva, que moviéndose mude continuamente de plano.

11º La superficie mista contiene superficies planas y curvas.

II. Division.

La Geometría se divide en plana y del espacio; la una trata las extensiones en el mismo plano, la otra cómo están en el espacio; luego la segunda supone la primera.

Para ver cómo hemos distribuido las materias en particular, consúltese el índice; generalmente hemos tratado en primer lugar los elementos constitutivos de las figuras, despues las propiedades y por último las relaciones que hay entre aquellas.

Notemos que la Geometría moderna no trata mas líneas curvas que el círculo, porque esta curva es muy sencilla y tiene muchas relaciones con la recta.

Círculo es una figura plana totalmente cerrada de una curva, cuyos puntos todos equidistan de otro interior llamado centro. La curva se llama circunferencia, la distancia igual del centro radio, y una parte cualquiera de la circunferencia arco.

Los matemáticos antiguos han tratado tambien las líneas curvas, porque todavía no se conocia con la extension de ahora la Geometría analítica, método mas acomodado y fecundo para las curvas.

III. Axiomas ó principios generales.

Los axiomas son los mismos que en el Álgebra:

1º Toda cantidad es igual á sí misma,

2º Una cantidad igual puede ponerse en lugar de otra igual,

3º Dos cantidades que son iguales á una tercera son iguales entre sí.

4º El todo es igual á sus partes juntas,

5º El todo es mayor que cada una de sus partes,

6º Las partes son menores que el todo.

7º Si con cantidades iguales se hacen operaciones iguales los resultados serán iguales.

IV. Signos.

$A=B$; A es igual á B	$A\sim B$; A semejante á B
$A>B$; A mayor B	A ‡ B; A paralela á B
$A<B$; A menor B	$\sphericalangle$ denota un ángulo
$A+B$; A mas B	R un ángulo recto
$A-B$; A ménos B	$\triangle$ denota un triángulo
$A\perp B$; A perpendicular á B	$\square$ denota un cuadrado
$A\cong B$: A congruente (idéntic.) con B	Rctg. denota un rectángulo.

Nota, Llamamos á dos figuras semejantes, usando el signo ($\sim$), si tienen la misma forma. Se les dice iguales con relacion al Álgebra, aplicando el signo ($=$), si tienen el mismo valor aunque no tengan la misma forma. En este caso otros dicen equivalentes. Finalmente, les llamamos congruentes (idénticas), uniendo el signo de la semejanza é igualdad ($\cong$) si tienen juntamente el mismo valor y la misma forma, de manera que se cubran perfectamente.

La otra denominacion hasta ahora usada puede ser exacta, considerando solo la Geometría elemental y haciendo abstraccion del Álgebra, lo que no parece justo. Pero confrontándola con la del Álgebra no es lógica, porque allí la palabra "igual" y su signo ($=$) dicen solamente una conveniencia en el valor no en la forma: así en

$$a^2-b^2=(a+b)\ (a-b)$$

se vé evidentemente que la forma es distinta, puesto que el primer miembro es una diferencia y el segundo un producto.

Ademas seria menester leer la expresion $a\times b=c\times d$, de otro manera en sentido algébrico que en el geométrico: una vez "igual" otra vez "equivalente", lo que cierto no conviene.

Finalmente los antiguos matemáticos de España usaban la palabra "igual" para denotar dos figuras que tienen la misma área aunque no la misma forma. (Véase Kresa S. J. catedrático de Matemáticas en el Colegio imperial de Madrid 1689).

Por esto hemos restituido á la palabra "igual" su antiguo sentido matemático, é introducido la otra "congruente," que tambien se usa en la lengua latina, italiana, inglesa, alemana &a. La cuestion es matemática no filológica.

V. Método.

En la Geometría como en cada ciencia averiguamos las propiedades por medio de la demostracion. Las definiciones y axiomas constituyen el fundamento de las demostraciones. Una verdad así demostrada se llama teorema y sirve para demostrar otros teoremas.

La demostracion puede ser directa ó indirecta: *directa* si demostramos la verdad propuesta, pero *indirecta* si demostramos la imposibilidad del contradictorio.

Las demostraciones deben ser geométricas y no puramente algébricas, es decir, no por verdades que principalmente sirvan para las cantidades discretas.

Por ejemplo, no parece bien el aplicar inmediatamente el teorema de las proporciones numéricas: "El producto de los términos medios es igual al producto de los extremos," diciendo: "luego en una proporcion de líneas rectas el rectángulo formado de los términos extremos &." La razon es evidente, pues la Geometría es una ciencia independiente del Álgebra, aunque tiene una íntima conexion con aquella.

Con eso no diremos que no se pueden aplicar verdades que se han demostrado en general de todas las cantidades, sean numéricas, geométricas ú otras, aunque se traten especialmente en el Álgebra; con tal que la demostracion sea acomodada á la índole de la Geometría elemental.

En cada teorema podemos distinguir hipótesis y tésis; la hipótesis espresa el sujeto completo, y la tésis el predicado de la proposicion. Muchas veces el sujeto completo se enuncia como una condicion y por eso se llama hipótesis.

Es costumbre poner corolarios, que son verdades, que se siguen inmediatamente del teorema propuesto; pero si estas verdades se siguieran mediatamente, aunque es útil el saberlas, no son generalmente de grande importancia.

El órden de los teoremas exige no solo una lógica consecuencia sino que naturalmente se sucedan unos á otros; si esto falta habrá solo aglomeracion de verdades matemáticas.

Aunque la Geometría sea absolutamente completa tratando solos los teoremas, pero no es perfecta si faltan los problemas, al ménos elementales, pues constituyen una parte integral de la Geometría.

Un problema geométrico exige determinar gráficamente por cantidades dadas una figura geométrica; puede ocurrir el construir, por ejemplo un triángulo, como tambien trazar líneas, determinar ángulos y puntos.

La solucion de los problemas no ha de ser puramente mecánica sino sobre todo científica, así abraza cuatro partes:

1ª *Análisis*, que descubre el modo de ejecutar la construccion, indicando las relaciones entre las cantidades dadas y construyendas.

2ª *Construccion* que ejecuta lo que se ha propuesto.

3ª *Demostracion*, que manifiesta ser verdadera la solucion que ha dado la construccion y no presenta dificultad alguna si el análisis es buena.

4ª *Determinacion*, que averigua las condiciones con las cuales el problema es posible, y cuántas soluciones diversas tenga.

La construccion y la demostracion son partes esenciales. El análisis es necesario en los problemas mas difíciles, pero generalmente no es en los elementales, porque en estos el modo de construir es mas ó ménos manifiesto. La determinacion supone muchas veces la trigonometría y un manejo práctico en las fórmulas trigonométricas, luego no se exige sino á los discípulos aprovechados.

PARTE PRIMERA.

GEOMETRIA PLANA.

CAPITULO I.

Relaciones entre líneas rectas.

§. 1º ÁNGULOS.

Explicaciones.

1ª Se llama ángulo la magnitud de la inclinacion de dos rectas que concurren en un punto. Las rectas se llaman lados y el punto de concurso vértice. El ángulo se designa por tres letras ó por una letra. (fig. 1) $\sphericalangle$CAB, $\sphericalangle\alpha$, $\sphericalangle$A, si no hay equivocacion.

La magnitud de un ángulo depende de la inclinacion de los lados y no de la magnitud de estos.

2ª Se llaman ángulos adyacentes los que tienen un lado comun y los otros dos en línea recta (fig. 2) $\sphericalangle$BAC y CAD.

3ª Un ángulo que es igual á su adyacente se llama ángulo recto (fig. 3) $\sphericalangle$BAC.

4ª Por analogía se llama (fig. 3) la recta BAD respectivamente á un punto A ángulo tendido.

5ª Si dos rectas se cortan, forman ángulos opuestos por el vértice, los que tienen el vértice comun y sus lados respectivos en línea recta (fig. 4) α y γ; β y δ.

6ª Los ángulos adyacentes tambien se llaman suplementarios, porque, como veremos, la suma de dos ángulos adyacentes es igual á dos rectos.

7ª Dos ángulos cuya suma es igual á un recto se llaman complementarios (fig. 5) α y β.

8ª Todo ángulo menor que un recto se llama agudo (fig. 4) $\sphericalangle\alpha$, si es mayor que un recto se llama obtuso (fig. 4) $\sphericalangle\beta$. Ademas se dividen todos los ángulos en cóncavos y convexos: cóncavos

los que son menores que dos rectos (fig. 4) α y β; convexos los que son mayores que dos rectos (fig. 6) $\sphericalangle\beta$.

9ª Una recta que forma con otra un ángulo recto, se dice perpendicular ó normal á esta (fig. 3) CA $\perp$ BD.

10ª Bisectriz de un ángulo es la recta, que le divide en dos partes iguales (fig. 7) DB bisectriz de $\sphericalangle$ABC.

Teor. 1. (fig. 8) Todos los ángulos rectos son iguales.

Hip. $\sphericalangle ABC=R$ y $\sphericalangle A'B'C'=R$;
Tes. $\sphericalangle ABC=A'B'C$

Dem. Prolongados los lados CB y C′B′ sobre B y B′ y poniendo B′ en B, de modo que B′C′ siga la direccion de BC y por consiguiente B′D′ la de BD (Introd. I, 6. cor. 2), decimos que B′A′ coincidira con BA; porque cualquier otra posicion de B′A′ por ejemplo, como en la figura BA′ es imposible, puesto que seria:

$$\sphericalangle A'BC<ABC$$

ademas $\quad \sphericalangle A'BC=A'BD$ y $\sphericalangle ABC=ABD$ (hip.)

luego $\quad \sphericalangle A'BD<ABD$ lo que es absurdo.

Cor. Un ángulo tendido es igual á dos rectos.

Teor. 2. (fig. 9). La suma de los ángulos adyacentes es igual á dos rectos.

Hip. $\sphericalangle$BAC y $\sphericalangle$CAD son adyacentes ó BAD línea recta.
Tes. $\sphericalangle BAC+CAD=2R$.

Dem. Siendo EA $\perp$ DB será $\sphericalangle BAE=EAD=R$

de donde: $\quad \sphericalangle BAE+EAD=2R$

pero: $\quad \sphericalangle BAC+CAD=BAE+EAD$

luego $\quad \sphericalangle BAC+CAD=2R$.

Cor. 1º La suma de todos los ángulos que se pueden formar á un lado de una recta y que tengan el mismo vértice es igual á 2R. La demostracion es la misma que en el teor.

Cor. 2º La suma de todos los ángulos formados al rededor de un punto es igual á 4R; pues prolongando un lado cualquiera tendremos que valdran tambien 2R los ángulos formados por la parte inferior del lado prolongado, y como los de la superior valen tambien dos rectos, todos juntos valen 4R.

Cor. 3º Si la suma de dos ángulos que tienen el vértice y el lado medio comun, es igual á 2R, los otros dos lados estarán en línea recta (fig. 10). Siendo $\alpha+\beta=2R$, y prolongando BA sobre A, el ángulo que resulta es necesariamente $\sphericalangle\beta$, porque debe ser un ángulo que añadido al $\sphericalangle\alpha$ sea igual á 2R.

Teor. 3. (fig. 10). Si dos ángulos son iguales, serán tambien iguales sus ángulos respectivamente adyacentes.

Hip. 1º $\sphericalangle \alpha=\alpha'$, 2º α, β y α', β' ángulos adyacentes.
Tes. $\sphericalangle \beta=\beta'$

Dem. $\sphericalangle \alpha+\beta=\alpha'+\beta'=2R$ (hip.)
pero $\sphericalangle \alpha=\alpha'$
luego $\sphericalangle \beta=\beta'$.

Teor. 4. (fig. 11). Ángulos opuestos por el vértice son iguales.

Hip. $\sphericalangle \alpha$ y α', $\sphericalangle \beta$ y β' son ángulos por el vértice opuestos.
Tes. $\sphericalangle \alpha=\alpha'$, $\sphericalangle \beta=\beta'$

Dem. parte 1ª $\sphericalangle \alpha+\beta=2R=\alpha'+\beta$ (I. 2)
luego $\sphericalangle \alpha=\alpha'$
parte 2ª $\alpha+\beta=2R=\beta'+\alpha$ (I. 2)
luego $\sphericalangle \beta=\beta'$

Teor. 5. (fig. 12). En un punto de una recta no puede levantarse mas que una sola perpendicular.

Tes, Si $CD \perp AB$ no lo será CD'

Dem. Si $CD \perp AB$ se sigue que $\sphericalangle DCB=R$
luego $\sphericalangle D'CB<R$ y $D'CA>R$
luego CD' nunca es perpendicular á AB.

§. 2º RECTAS PARALELAS.

Explicaciones.

1ª Dos rectas se llaman paralelas si tienen la misma direccion, es decir, si la una es la norma para la otra en su situacion.

Cor. 1. Por un punto fuera de una recta no se puede trazar sino una sola paralela á esta, porque la recta tiene una sola direccion.

Cor. 2. Si tenemos una recta situada en un plano y tomamos en dicho plano un punto, la recta que pase por este punto y sea paralela á la dada, estará toda ella en dicho plano.

Si no fuere evidente sirva para demostrarlo:

La extension de un plano es la misma en todas sus partes y en el mismo sentido; pero si la recta trazada no estuviera en este plano, el plano no tendria su extension del mismo modo que la tiene en la parte donde se halla la primera recta, porque no podria tener en esta parte la misma direccion.

Cor. 3. Dos rectas paralelas no se pueden cortar por mas que se prolonguen, porque dos rectas que se cortan, no tienen la misma direccion.

2ª Las rectas no paralelas se llaman convergentes ó divergentes: convergentes cuando se aproximan, divergentes cuando se separan.

3ª Dos rectas cortadas por una tercera forman 4 pares de ángulos correspondientes, de alternos y de opuestos (fig. 13).

Correspondientes son: a,α b,β c,γ d,δ.

Alternos: internos a,δ b,γ; externos d,α c,β

Opuestos: internos a,γ b,δ; externos c,α d,β

Los correspondientes tienen posiciones respectivamente semejantes, los alternos totalmente contrarios, los opuestos tienen posiciones contrarias solo relativamente á las rectas cortadas.

Teor. 6. (fig. 13). Si una recta corta á otras dos, de modo que dos ángulos alternos sean iguales, tambien los otros alternos y los correspondientes lo serán, y la suma de los opuestos es igual á 2R.

Hip. $\sphericalangle a=\delta$.

Tes. parte 1ª $\sphericalangle b=\gamma$, $d=\alpha$, $c=\beta$.
parte 2ª $\sphericalangle a=\alpha$, $b=\beta$, $c=\gamma$, $d=\delta$.
parte 3ª $\sphericalangle a+\gamma=2R$, $b+\delta=2R$.
$c+\alpha=2R$, $d+\beta=2R$.

Dem. para la parte 1ª $b=\gamma$
$a+b=\gamma+\delta=2R$
pero $a=\delta$ (hip.)
luego $b=\gamma$

para la parte 2ª $a=\alpha$.
$\alpha=\delta$ (I. 4)
pero $a=\delta$ (hip.)
luego $a=\alpha$.

para la parte 3ª $a+\gamma=2R$
$\delta+\gamma=2R$ (I. 2)
pero $a=\delta$ (hip.)
luego $a+\gamma=2R$

Las demas demostraciones serán un buen ejercicio para los discípulos.

Cor. Si una ecuacion en la tésis propuesta tiene lugar, todas las demas ecuaciones lo tendrán tambien.

[Es un buen ejercicio para los discípulos].

Teor. 7. (fig. 14). Si una recta corta á una de dos paralelas cortará tambien á la otra.

Hip. AB ‡ DE y CF corta DE en C.
Tes. CF prolongada cortará AB.

Dem. Supongamos las tres rectas indefinidamente prolongadas, y veremos que para que toda la parte infinita de la recta CE pase á la parte superior de CF, es necesario que la CE varíe su direccion primitiva; puesto que para estar sobre CF será menester que la CE mude su direccion relativamente á CF.

Ahora moviéndose solamente CE paralelamente á sí misma hasta coincidir con AB, no ha variado la direccion relativa entre CE y CF, porque no se ha hecho en CE alguna mudanza en la direccion, sino solamente en el lugar.

Luego toda la parte de la recta CE no ha pasado á la parte superior de CF, y por eso estará CE cortada por CF tambien en su nueva posicion, es decir en la recta AB; luego CF corta AB.

Teor. 8. (fig. 14). Si dos rectas, por mas que se prolonguen no se encuentran, son paralelas.

Hip. AB y DE no se encuentran &a.
Tes. AB ‡ DE.

Dem. Si no fuese DE ‡ AB podria trazarse en un punto C de la recta DE una paralela á AB, sea CF, luego cortaria segun el Teor. 7 ED á la recta AB, lo que es contra la hipótesis.

Teor. 9. (fig. 15). Si una recta corta á otras dos de modo que los ángulos alternos sean iguales, las dos rectas son paralelas.

Hip. $\sphericalangle$a$=\delta$.
Tes. CD ‡ C′D′.

Dem. Porque si a$=\delta$, tambien será b$=\gamma$ (I. 6), luego las dos figuras DABD′ y C′BAC son idénticas, porque tienen todos sus elementos iguales y de la misma manera colocados; y por eso si CD y C′D′ se cortarian á la derecha de AB, tambien se cortarian á la izquierda; pero esto es imposible, luego no se pueden cortar en parte alguna.

Cor. 1. Lo mismo tendremos si los ángulos correspondientes son iguales, ó si la suma de dos ángulos opuestos es igual á dos rectos; porque en esta hipótesis serán tambien los ángulos alternos iguales (I. 6. Cor.)

Cor. 2. Dos rectas perpendiculares á una tercera son paralelas, puesto que forman ángulos correspondientes iguales.

Cor 3. Por un punto situado fuera de una recta, una sola perpendicular puede bajarse á dicha recta; porque si hubiera

ademas de esta otra, ambas serian paralelas (Cor. 2), lo que es absurdo.

Teor. 10. (fig. 16). Si una recta corta á dos paralelas, los ángulos alternos y correspondientes son iguales; la suma de los opuestos es igual á dos rectos.

Hip. AB ‡ A′B′.
Tes. $\sphericalangle\beta=\alpha$ &a.

Dem. No siendo $\sphericalangle\beta=\alpha$ sea $\sphericalangle$b$=\alpha$, luego seria CD ‡ AB y habria por un punto E dos rectas paralelas á AB; lo que es absurdo. Pero si los alternos son iguales, tambien los correspondientes lo serán, y la suma de los opuestos será igual á dos rectos (I. 6).

Cor. Una recta perpendicular á una de dos paralelas es tambien perpendicular á la otra (fig. 17).

Teor. 11. (fig. 18). Dos rectas paralelas á una tercera son paralelas entre sí-

Hip. AB ‡ EF y CD ‡ EF.
Tes. AB ‡ CD.

Dem. Siendo GH la secante de tres rectas tendremos:

$\sphericalangle\alpha=\gamma$ y $\sphericalangle\beta=\gamma$ (I. 10), luego $\sphericalangle\alpha=\beta$
de donde AB ‡ CD (I. 9 cor.).

§. 3º CONSECUENCIAS ACERCA DE LOS ÁNGULOS CONSIDERADOS EN SÍ Y EN LAS FIGURAS.

Explicacion.

Las figuras de que trata la Geometría plana son especialmente las que están terminadas por rectas, luego: el *triángulo* que es una superficie totalmente limitada por tres rectas, el cuadrilátero, que es una superficie totalmente limitada por cuatro rectas, y en general los polígonos, es decir, superficies planas totalmente limitadas por rectas, son objeto de la Geometría.

Las rectas se llaman lados, la suma de todos los lados perímetro, y el punto donde concurren dos lados, se dice vértice; luego los polígonos tienen siempre tantos vértices, cuantos lados.

La recta que une dos vértices no adyacentes, se llama diagonal.

Los polígonos se dividen en convexos y cóncavos: convexos (fig. 23) aquellos cuyo perímetro no puede ser cortado por una recta mas que en dos puntos, cóncavos (fig. 24) cuyo perímetro puede serlo en dos y mas puntos.

Para distinguir los polígonos de mas de cuatro lados se dicen polígonos con cinco, seis, siete &a (n) lados; ó pentágono el que tiene cinco, exágono el que tiene seis, decágono el que tiene diez, pentedecágono el que tiene quince lados,

NOTA. No pondremos un capítulo especial de los polígonos en general, porque sus propiedades elementales son consecuencias inmediatas de las del triángulo.

Teor. 12. (fig. 19). Dos ángulos formados por lados respectivamente paralelos son iguales ó suplementarios.

Caso primero: los lados son paralelos dos á dos en un mismo sentido.

Hip. AB ∦ A′B′, AC ∦ A′C′.
Tes. ∢BAC=B′A′C′.

Dem. Júntese A con A′ y serán:

∢BAD=B′A′D (I, 10.)
y ∢CAD=C′A′D
luego: BAD—CAD=B′A′D—C′A′D
es decir: BAC=B′A′C′

Caso segundo: los lados paralelos tienen sentidos opuestos.
Dem. Formando del ángulo B′A′C′ el ángulo opuesto por el vértice EA′F, tendremos la condicion, y por eso ∢BAC=EA′F.

Caso tercero: dos lados paralelos tienen el mismo sentido, y los otros dos sentido contrario.
Dem. Formando del ángulo B′A′C′ el ángulo suplementario B′A′E, tendremos la condicion, y por eso ∢B′A′E+BAC=2R.

Teor. 13. (fig. 20). Dos ángulos formados por lados respectivamente perpendiculares son iguales ó suplementarios.

Advertencia. Tomemos el caso mas sencillo, esto es que los vértices coincidan en un mismo punto, y los lados sean perpendiculares como en la figura

Hip. DB ⊥ AB y EB ⊥ CB
Tes. ∢ABC+EBD=2R

Dem. ∢ABC+CBE+EBD+DBA=4R (I. 2. cor. 2].
pero: ∢CBE=R y ∢DBA=R (hip.)
luego: ∢ABC+EBD=2R

Acerca de los otros casos sabemos que todos los ángulos, cuyos lados son perpendiculares á las rectas AB y CB, tienen sus lados paralelos á los del ángulo DBE (I. 9. cor. 2), y por eso son iguales ó suplementarios del ángulo DBE (I. 12). Pero un ángu-

lo que es suplementario de ángulo DBE, es igual á ∢ABC, y el que es igual á ∢DBE, es suplementario de ∢CBA.

Por ejemplo, ∢HFG es suplm. de DBE, luego igual á ABC
y ∢HFJ es igual á DBE, luego suplementario de ABC.

NOTA. En un caso especial es fácil determinar si son suplementarios ó iguales.

Teor. 14. (fig. 21). La suma de los tres ángulos de un triángulo valen juntos dos rectos.

Tes. $\alpha+\beta+\gamma=2R$.

Dem. Trazando por el punto C la recta MN paralela á AB tendremos:

$\alpha=\alpha'$ y $\beta=\beta'$ (I. 10)
ademas: $\alpha'+\gamma+\beta'=2R$ (I. 2 cor. 1)
luego: $\alpha+\gamma+\beta=2R$.

Cor. 1. Un triángulo no puede tener mas que un ángulo recto ú obtuso.

Cor. 2. Dados dos ángulos de un triángulo se conoce el tercero.

Teor. 15. (fig. 22). Los ángulos de un cuadrilátero valen juntos cuatro rectos.

Tes. ∢B+D+BCD+DAB=4R.

Dem. ∢B+BCA+BAC=2R (I. 14).
y ∢D+ACD+CAD=2R
luego B+D+(BCA+ACD)+(BAC+CAD)=4R
ó B+D+BCD+BAD=4R.

Teor. 16. (fig. 23). La suma de todos los ángulos de un polígono convexo con (n) lados es igual á (n—2) veces dos rectos.

Dem. En un polígono convexo con (n) lados se pueden trazar de un vértice (n—2) diagonales, que dividirán todo el polígono en (n—2) triángulos, cuyos ángulos componen los del polígono. Pero los ángulos de cada triángulo valen juntos dos rectos.

Luego la suma de los ángulos de todos los triángulos ó del polígono es igual á (n—2) veces dos rectos. (Véase la fig. 23).

Cor. (fig. 24). La suma de todos los ángulos de un polígono cóncavo con (n) lados es tambien igual á (n—2) veces dos rectos. La demostracion general es un poco complicada; pero en casos concretos puede fácilmente descomponerse en (n—2) triángulos. (Véase la fig. 24).

CAPITULO II.

Triángulos.

§ 4ª PROPIEDADES DE LOS LADOS Y ÁNGULOS EN UN TRIÁNGULO.

Explicaciones.

1º Sabemos ya que el triángulo es una figura plana totalmente limitada por tres rectas.

2ª *Base* es uno cualquiera de sus lados; *vértice* el punto de interseccion de los otros dos; *altura* la perpendicular bajada desde el vértice á la base ó su prolongacion.

3ª Un triángulo es *equilátero*, si tiene todos sus tres lados iguales, *isósceles*, si tiene dos lados iguales, y *escaleno*, si todos los lados son desiguales.

4ª Un triángulo se llama *rectángulo*, si tiene un ángulo recto, *obtusángulo*, si un ángulo es obtuso, *acutángulo*, si todos los ángulos son agudos.

5ª Los lados que en el triángulo rectángulo forman el ángulo recto se llaman *catetos*, y el lado opuesto al ángulo recto *hipotenusa*.

6ª Un ángulo externo de un triángulo se forma por un lado del triángulo y la prolongacion de otro; luego es suplementario del ángulo interior adyacente.

Teor. 1. (fig. 25). El ángulo externo de un triángulo es igual á la suma de los dos ángulos opuestos interiores.

Tes. $\sphericalangle DCB = A + B$.

Dem. $\sphericalangle A + B + ACB = 2R$ (I. 14)
ademas: $\sphericalangle DCB + ACB = 2R$
de donde: $\sphericalangle DCB + ACB = A + B + ACB$
luego: $\sphericalangle DCB = A + B$.

Cor. Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios.

Teor. 2. (fig. 26). En un triángulo isósceles se oponen á los lados iguales ángulos iguales.

Hip. $AC = BC$.

Tes. $\sphericalangle A = B$.

Dem. Siendo CD la bisectriz del ángulo ACB, y haciendo que gire el $\triangle CDB$ al rededor de CD, coincidirá BC con AC, porque el ángulo $BCD = ACD$ y $BC = AC$, y por eso tambien DB con DA (Introd. I. 6 cor. 2); luego coincidirá el ángulo B con A, es decir, el ángulo $A = B$.

Cor. Un triángulo equilátero es tambien equiángulo, y cada ángulo igual á $\frac{2}{3}R$.

Teor. 3 (fig. 27). En todo triángulo á mayor lado se opone mayor ángulo.

Hip $BC > AB$.
Tes. $\sphericalangle BAC > BCA$.

Dem. Tomando $BD = BA$ y uniendo D con A tendremos:
$\sphericalangle BDA = BAD$, pero $\sphericalangle BDA > BCA$ (II. 1)
luego $\sphericalangle BAD > BCA$ y mucho mas lo será el ángulo BAC.

Cor. Solo el ángulo que se opone al mayor lado puede ser obtuso ó recto.

Teor. 4. A los ángulos iguales de un triángulo se oponen lados iguales.

Dem. Si un lado opuesto fuera mayor que otro, el ángulo respectivamente opuesto seria mayor (II 3), lo que es contra la hipótesis.

Teor. 5. En todo triángulo á mayor ángulo se opone mayor lado.

Dem. Se opone al ángulo mayor ó mayor lado ó igual ó menor; no puede ser igual, véase el Teor. 2, tampoco menor por ser contra el Teor. 3, luego mayor.

Cor. 1. En todo triángulo rectángulo la hipotenusa es el lado mayor.

Cor. 2. La distancia mas corta entre un punto y una recta es la perpendicular que los une; porque toda otra recta será hipotenusa en un triángulo, cuyo cateto es la perpendicular (fig. 28).

Teor. 6 fig. 29). En todo triángulo un lado es menor que la suma de los otros dos y mayor que su diferencia.

Tes. parte 1ª $AC < AB + BC$; parte 2ª $AC > BC - AB$.

Dem. para la parte 1ª

Prolongando CB hasta A′ de modo que BA′=BA será:

$$\sphericalangle BAA' = BA'A \text{ (II 2)}$$

ademas: $\sphericalangle CAA' > BAA'$

luego: $\sphericalangle CAA' > BA'A$

luego: $CA' > AC$ (II. 5)

ó $AB + BC > AC$

Dem. para la parte 2ª

Sea $BA'' = BA$

luego $\sphericalangle BAA'' = AA''B$ (II 2)

luego: $AA''B < R$ (I. 14 cor. 1)

„ $CA''A > R$

„ $CA''A > CAA''$

„ $AC > CA''$

ó $AC > CB - AB$.

Cor. 1 (fig. 30). Si dos triángulos tienen un lado comun y los otros dos hácia un mismo frente, de modo que el uno comprenda al otro la suma de los lados que mas se apartan del comun, es mayor que la de los mas próximos,

Dem. Prolónguese AD hasta cortar BC en E y será:

$$AD + DC < AD + DE + EC < AB + BE + EC$$

ó $\quad AD + DC < AB + BC$

Nota. $\sphericalangle ADC > AEC > ABC$.

Cor. 2 (fig. 31). Si dos polígonos convexos tienen un lado comun y los otros hácia un mismo frente, de modo que el uno comprenda al otro, la suma de los lados que mas se apartan del comun es mayor que la de los mas próximos.

Decimos $AC + CD + DB > AE + EF + FG + GB$.

Dem $\quad AC + CH > AE + EH$

$$EH + HD + DJ > EF + FJ$$
$$FJ + JK > FG + GK$$
$$GK + KB > GB$$

luego: $AC + CH + EH + HD + DJ + FJ + JK + GK + KB$

$$> AE + EH + EF + FJ + FG + GK + GB$$

luego: $\quad AC + CD + DB > AE + EF + FG + GB$.

§. 5º CONGRUENCIA (IDENTIDAD) DE LOS TRIÁNGULOS.

Expl. Dos polígonos se llaman congruentes (idénticos), si sobrepuestos coinciden, y por eso tienen todos sus elementos respectivamente iguales y del mismo modo dispuestos.

"*Respectivamente iguales*" denota solamente que un elemento en uno es igual á un elemento en otro.

Teor. 7. (fig. 32). Dos triángulos son congruentes si tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido.

Hip. $AC = A'C'$, $AB = A'B'$, $\sphericalangle A = A'$.
Tes. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Dem. Colocando el vértice A′ sobre A y A′C′ sobre AC caerá A B′ sobre AB, por ser iguales los ángulos A′ y A y los lados A′B′ y AB (hip.); luego los tres vértices del $\triangle A'B'C'$ coincidirán con los del $\triangle ABC$, y por eso $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Cor. Para la congruencia de los triángulos rectángulos, basta que tengan los catetos respectivamente iguales.

Teor. 8. (fig. 32). Dos triángulos son congruentes si tienen un lado igual y los ángulos adyacentes respectivamente iguales.

Hip. $AB = A'B'$, $\sphericalangle A = A'$ y $B = B'$.
Tes. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Dem. Colocando A′B′ sobre AB de modo que coincida A′ con A y B′ con B, seguirá A′C′ la direccion de AC y B′C′ la de BC, por ser el ángulo $A' = A$ y $B' = B$; luego el tercer vértice C′ coincidirá con C por ser el punto de la interseccion de AC y BC, luego $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Cor. Para coincidir los triángulos rectángulos, basta que tengan respectivamente iguales la hipotenusa y un ángulo agudo.

Teor. 9. (fig. 33). Dos triángulos son congruentes, si tienen los tres lados respectivamente iguales.

Hip. $AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CA = C'A'$.
Tes. $\triangle ABC \cong A'B'C'$.

Dem. Siendo AB el lado mayor en el $\triangle ABC$ y por eso A′B′ el en el $\triangle A'B'C'$ sabemos que los ángulos A y B son agudos (II 3 cor.), luego tambien A′ y B′ lo serán.

Ahora coloquemos A′B′ sobre AB, de modo que coincida A′ con A y B′ con B, y que caiga el vértice C′ á diferente lado que C; luego serán $\sphericalangle CBC' < 2R$ y $CAC' < 2R$ y por eso la recta CC′ cortará á AB.

Así dispuestos los triángulos darán:

$BC=BC'$ y $AC=AC'$ (hip.)

luego: $\sphericalangle C'CA=CC'A$ y $C'CB=CC'B$ (II 2).

luego: $\sphericalangle C'CA+C'CB=CC'A+CC'B$.

es decir: $\sphericalangle ACB=AC'B=A'C'B'$.

Luego tenemos dos triángulos que tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido, y por tanto son congruentes (II 7).

Cor. Para coincidir los triángulos equiláteros, basta que tengan un lado respectivamente igual.

Teor. 10. (fig. 34). Dos triángulos son congruentes, si tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo, que se opone al mayor lado.

Hip. $AC=A'C'$, $BC=B'C'$, $\sphericalangle B=B'$

ademas $AC>BC$ y $A'C'>B'C'$.

Tes. $\triangle ABC\cong A'B'C'$.

Dem. Pongamos el $\sphericalangle B'$ sobre B de modo que $B'C'$ se ajuste con BC, luego C' caerá en C, por ser $B'C'=BC$ (hip), y $B'A'$ seguirá la direccion de BA; ahora digo que A' caerá precisamente sobre A, y no á la derecha en D, ni á la izquierda en D'; pues si no lo fuese,

sea 1º A' en D; de donde:	ó sea 2º A' en D'; de donde:
$CD=C'A'=CA$	$CD'=C'A'=CA$
luego $\sphericalangle CAD=CDA$	luego $\sphericalangle CD'A=CAD'$
pero $\sphericalangle CDA>B$ (II 1.)	pero $\sphericalangle CAD'>B$ (II 1.)
luego $\sphericalangle CAD>B$	luego $\sphericalangle CD'A>B$
luego $CB>CA$ (II 5.)	luego $CB>CD'$ (II 5.)
lo que es contra la hipótesis	ó $CB>CA$ lo que es contra la hipótesis.

Luego caerá precisamente A' sobre A y por eso

$$\triangle ABC\cong A'B'C'.$$

Cor. Dos triángulos rectángulos son congruentes, si tienen respectivamente iguales la hipotenusa y un cateto.

§. 6º RELACIONES ENTRE TRIÁNGULOS QUE TIENEN COMUNES SOLO DOS ELEMENTOS.

Teor. 11. (fig. 35, 36, 37). Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales y desigual el ángulo comprendido, el tercer lado será tambien desigual y de los dos, mayor el que se oponga á mayor ángulo.

Hip. $AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $\sphericalangle ABC>B'$.

Tes. $AC>A'C'$.

Dem. Poniendo el triángulo A'B'C' entre ABC, de modo que caiga A' en A y B' en B, caerá la recta B'C' por dentro del ángulo ABC, por ser el ángulo $B'<ABC$; y el punto C' puede tener tres posiciones:

1ª en el lado AC (fig. 35) donde es manifiesto que $AC>A'C'$ $(=AC')$.

2ª fuera del $\triangle$ ABC (fig. 36) en el punto C'.

Juntando C con C' será $BC'=B'C'=BC$

luego $\sphericalangle BCC'=BC'C$, pero $BCC'>ACC'$;

„ $\sphericalangle BC'C>ACC'$ y mucho mas $AC'C>ACC'$;

„ $AC>AC'$, es decir $AC>A'C'$.

3ª dentro del $\triangle$ABC (fig. 37). Juntando C con C' será, por ser $BC'=BC$:

$\sphericalangle BCC'=BC'C$, luego $BC'C<R$ (I, 14, cor. 1)

ademas $\sphericalangle AC'B<2R$, luego $AC'C>R$ (I. 2, cor. 2)

luego $\sphericalangle AC'C>ACC'$ luego $AC>AC'$

es decir $AC>A'C'$.

De otra manera: $AC+CA>AC'+C'B$ (II 6, cor. 1)

pero: $BC=BC'$, luego $AC>AC'$.

Teor. 12. Si dos triángulos tienen dos lados respectivamente iguales y desigual el tercero, se opondra al mayor lado el mayor ángulo.

Dem. Los ángulos no son iguales, porque en este caso serian los triángulos congruentes; ademas el ángulo que se opone al mayor lado, no puede ser el ángulo menor, porque segun el teor. 11, el lado correspondiente seria el menor (contra hip.), luego dicho ángulo es el mayor.

§. 7º CONSECUENCIAS IMPORTANTES.

Teor. 13. (fig. 38). Una recta trazada en el triángulo isósceles desde el vértice hasta la base que satisface á una de las tres condiciones—*ser perpendicular á la base, dividir á esta en partes iguales, ser bisectriz del ángulo del vértice*,—satisface á las otras dos.

Dem. 1º Si BD ⊥ AC, será △ABD≅CBD (II, 10, cor.)

2º Los mismos triángulos son congruentes, si AD=DC (II 9.)

3º Supuesto que el ángulo ABD=CBD, tendremos lo mismo (II 7). Pero sabemos que en el caso de congruencia se cumplen todas las condiciones juntamente.

Teor. 14. (fig. 39). Los puntos de la perpendicular levantada en el medio de una recta equidistan de los estremos de esta.

Hip. AC=CB y DC ⊥ AB.
Tes. AP=BP.

Dem. △ACP≅BCP (II 7), luego: AP=BP.

Cor. Todos los puntos fuera de la perpendicular no equidistan de dichos puntos; porque juntando un punto cualquiera M con B y A será el ángulo NBC=NAC, por ser NB=NA, luego el ángulo MAB>, MBA y por consiguiente MB>MA (II 5).

Teor. 15. (fig. 40). Los puntos en la bisectriz de un ángulo equidistan de los lados de esta.

Hip. ∢BAD=CAD y PM ⊥ AB, PN ⊥ AC.
Tes. PM=PN.

Dem. En los triángulos formados son dos ángulos respectivamente iguales por hipótesis, luego tambien: ∢APM=APN; ademas AP es un lado comun, luego △APM≅APN (II 8), y por tanto PM=PN.

Cor. Todos los puntos fuera de la bisectriz no equidistan de dichos lados; porque juntando dicho punto con el vértice los triángulos formados fuesen congruentes (II, 10 cor.) y por tanto la recta trazada bisectriz del ángulo, lo que es contra la hipótesis.

§. 8º PROBLEMAS ELEMENTARES.

Advertencia. Como las demostraciones de los teoremas suponen ciertos principios, así suponen tambien las construcciones de los problemas ciertos postulados, los cuales son dos:

1º Entre dos puntos trazar una recta determinada ó indeterminada.

2º Trazar con un radio dado un arco ó un círculo.

Problema 1º (fig. 41). Dados los tres lados a, b, c, construir el triángulo.

Constr. Trazada AB=a describamos desde A un arco con el radio c, y desde B un arco con el radio b; uniendo el punto C donde los dos arcos se cortan con A y B, será ABC el triángulo pedido.

Dem. Supuesto que los tres puntos A, B, C no están en la misma recta, evidentemente tendremos un triángulo en el cual AB=a BC=b y AC=c.

Nota. Segun (cap. II, Teor. 6) seria el problema imposible, si la suma de dos de las rectas dadas fuese menor ó igual á la tercera.

Probl. 2º (fig, 42). En un punto A de una recta MN formar un ángulo dado β.

Constr. Tomando en los lados del ángulo β dos puntos C y D, unámoslos con la recta CD. En la recta MN tomemos AE=BD y describamos desde A con el radio BC y desde E con el radio DC dos arcos, el punto G donde se corten, unámosle con A y E; el ángulo GAE será el ángulo pedido.

Dem. △EAG≅DBC luego ∢EAG=β.

Probl. 3º (fig. 43). Por un punto dado A trazar una paralela á la recta dada MN.

Constr. Juntemos el punto A con MN por una recta AB, tracemos otra AC de modo que el ángulo BAC=ABM y será CD la recta pedida.

Dem. ∢BAC=ABM, luego DC ‡ MN (I, 9.)

Probl. 4º (fig. 44). Dividir un ángulo dado BAC en dos partes iguales.

Constr. Tomando AF=AE describamos desde E y F con el mismo radio dos arcos que se corten en G; juntemos G con A, y la recta AG será bisectriz del ángulo BAC.

Dem. Juntando el punto G con E y F será:

△AFG≅AEG (II 9).

luego ∢FAG=EAG

Probl. 5. (fig. 45). En un punto dado A de una recta MN levantar una perpendicular á esta.

Constr. Tomando AD=AC y describiendo desde D y C con un mismo radio dos arcos que se corten en E, juntemos E con A y será $EA \perp MN$.

Dem. $\triangle EAD \cong EAC$ (II 9), luego: $\sphericalangle EAD = EAC = R$.

Probl. 6° (fig. 46) Desde un punto C fuera de una recta AB bajar una perpendicular á esta.

Constr. Describamos desde C un arco, que corte á AB en dos puntos E y F, y desde E y F otros dos arcos de igual radio, que se corten en G, y juntando C con G será $CG \perp AB$.

Dem. Júntese C con E y F, ademas G con E y F, y tendremos:

$\triangle ECG \cong FCG$ (II 9.) luego: $\sphericalangle ECD = FCD$

ademas $\triangle ECF$ isóscele, luego: $CD \perp EF$ (II. 13).

Probl. 7. (fig. 47). Dividir una recta dada AB en dos partes iguales..

Constr. Describiendo desde A y B con un mismo radio arcos, que se corten en C, y con otro radio desde los mismos puntos arcos que se corten en E, júntese C con E hasta cortar AB en D y será AD=BD.

Dem. $\triangle ACE \cong BCE$ (II. 9), luego: $\sphericalangle ACD = BCD$.

ademas $\triangle ACB$ isósceles, luego: AD=DB (II. 13).

Probl. 8. (fig. 48). Dividir un ángulo recto ABC en tres partes iguales.

Constr. Tomando en el lado BC un punto cualquiera E descríbanse desde B y E con el radio BE dos arcos, que se corten en D, júntese D con B y trazada la bisectriz BF del ángulo DBE, dividirán las rectas DB y FB al ángulo recto en tres partes iguales.

Dem. $\triangle BDE$ es equilátero (Constr.) luego: $\sphericalangle DBE = \frac{2}{3} R$ (II. 2 Cor.) luego $\sphericalangle DBA = \frac{1}{3} R$ y por ser BF bisectriz del ángulo DBE será tambien $\sphericalangle DBF = FBE = \frac{1}{3} R$.

CAPITULO III.

Paralelógramos.

§ 9ª PROPIEDADES FUNDAMENTALES.

Explicaciones.

1ª Se llama *paralelógramo* el cuadrilátero, cuyos lados opuestos son paralelos.

2ª Un paralelógramo, que tiene todos los ángulos rectos es un *rectángulo*; y será *cuadrado*, si tiene ademas todos los lados iguales.

3ª Un paralelógramo será un *rombo* si tiene los lados iguales y los ángulos adyacentes desiguales.

4ª Se llama *romboide* el paralelógramo, cuyos lados son desiguales como tambien los ángulos adyacentes.

5ª *Trapecio* es un cuadrilátero, que tiene dos lados paralelos y otros dos no.

6ª *Trapezoide* es el cuadrilátero, que no tiene lados paralelos.

7ª *Altura* de un paralelógramo es la perpendicular entre los lados opuestos, los cuales se llaman entónces bases.

8ª *Altura* de un trapecio es la perpendicular entre sus lados paralelos.

Teor. 1. (fig. 49). En todo paralelógramo los ángulos opuestos son iguales.

Hip. ABCD un paralelógramo.

Tes. $\sphericalangle A = C$ y $B = D$.

Dem.	A+B=2 R. (I. 10) A+D=2 R.	D+A=2 R (I. 10.) C+D=2 R
luego	A+B=A+D B=D	D+A=C+D A=C

Teor. 2. (fig. 50). La diagonal divide al paralelógramo en dos triángulos congruentes.

Hip. ABCD paralelógramo y DB diagonal.

Tes. $\triangle BCD \cong DAB$

Dem. $\sphericalangle BDA = DBC$ y $\sphericalangle ABD = CDB$ (I. 10) y BD un lado comun, luego $\triangle BAD \cong DCB$ (II. 8).

Teor. 3. (fig. 50). En todo paralelógramo los lados opuestos son iguales.

Hip. ABCD un paralelógramo
Tes. $AB = DC$ y $AD = BC$.

Dem. Trazada la diagonal BD será

$\triangle BAD \cong BCD$ (III. 2)

luego $AB = DC$ y $AD = BC$

Cor. Dos paralelas tienen igual distancia en toda su extension, puesto que trazados dos perpendiculares entre las paralelas forman con estas un paralelógramo (Def. 1ª).

Teor. 4. (fig. 51). Los diagonales del paralelógramo se dividen mútuamente en dos partes iguales.

Tes. $AO = OC$ y $BO = OD$.

Dem. $AB = DC$ (III. 3) $\sphericalangle OBA = ODC$ y $\sphericalangle OAB = OCD$ (I. 10)

luego $\triangle AOB \cong COD$ luego: $AO = OC$ y $BO = OD$.

Teor. 5. Un cuadrilátero será paralelógramo:
1º Si los ángulos opuestos son iguales.
2º Si dos lados opuestos son iguales y paralelos.
3º Si los lados opuestos de dos en dos son iguales.
4º Si son iguales dos lados opuestos y dos ángulos opuestos tambien.
5º Si las diagonales se dividen mútuamente en dos partes iguales.

Caso 1º (fig. 49) *Hip.* $A = C$ y $B = D$.

Dem. $A + B + C + D = 4R$ (I. 15)

pero $A = C$ y $B = D$ (hip)

luego $2A + 2B = 4R$ y $2D + 2A = 4R$.

ó $A + B = 2R$ y $D + A = 2R$.

y por eso $AD \ddagger BC$ y $AB \ddagger DC$ (I. 9. cor. 1.)

Caso 2º (fig. 50). Hip. $AB = DC$ y $AB \ddagger DC$.

Dem. Por ser $AB \ddagger DC$ será $\sphericalangle ABD = CDB$ (I. 10).

luego $\triangle ABD \cong CDB$ (II. 7) y por eso $\sphericalangle ADB = CBD$
luego $AD \ddagger BC$ y por hipótesis es ya $AB \ddagger DC$.

Caso 3º (fig. 50). Hip. $AB = DC$ y $AD = BC$,

Dem. $\triangle ABD \cong CDB$ (II. 9)

luego $\sphericalangle ABD = CDB$ y $\sphericalangle ADB = CBD$
„ $AB \ddagger CD$ y $AD \ddagger CB$ (I. 9.)

Caso 4º (fi. 49). *Hip.* $AB \ddagger DC$ y $\sphericalangle A = C$.

Dem. $AB \ddagger DC$ (hip.)

luego $\sphericalangle A + D = 2R$ y $B + C = 2R$ (I. 10.)
„ $A + D = B + C$,

pero por ser $A = C$ (hip.) será $D = B$, luego tenemos el caso 1º

Caso 5º (fig. 51). *Hip.* $AO = OC$ y $DO = OB$.

Dem. $\triangle AOD \cong COB$ y $\triangle AOB \cong COD$. (II. 7.)

luego $AD = BC$ y $AB = DC$, lo que es el caso 3º.

Teor. 6. (fig. 52.) El paralelógramo que tiene un ángulo recto es rectángulo.

Hip. ABCD un paralelógramo y $\sphericalangle A = R$.
Tes. $\sphericalangle A = B = C = D = R$.

Dem. $\sphericalangle A + B = R$, pero: $\sphericalangle A = R$, luego: $\sphericalangle B = R$
$\sphericalangle B + C = R$, pero: $\sphericalangle B = R$, luego: $\sphericalangle C = R$
$\sphericalangle C + D = R$, pero: $\sphericalangle C = R$, luego: $\sphericalangle D = R$.

Teor. 7. (fig. 52). En el rectángulo las diagonales son iguales.
Tes. $AC = BD$.

Dem. $\triangle BAD \cong CDA$ (II. 7), luego $AC = BD$.

Teor. 8. (fig. 52). Un paralelógramo, que tiene diagonales iguales, es un rectángulo.

Hip. $AC = BD$
Tes. $\sphericalangle BAD = R$ &a.

Dem. $\triangle BAD \cong CDA$ (II. 9) luego $\sphericalangle BAD = CDA$

ademas $\sphericalangle BAD + CDA = 2R$ (hip.) luego $2BAD = 2R$.

ó $\sphericalangle BAD = R = CDA$ &a. (III. 6.)

Teor. 9. (fig. 53). En el rombo las diagonales son perpendiculares.

Hip. $AB = AD$.
Tes. $AC \perp DB$.

Dem. $\triangle DAB$ isósceles (hip.), ademas $DO = OB$ (III. 4),

luego $AO \perp DB$ (II. 13.)

Cor. En el cuadrado las diagonales son iguales y perpendiculares; pues es un rectángulo equilátero.

Teor. 10. El paralelógramo que tiene las diagonales perpendiculares entre sí y desiguales es un rombo; pero será cuadrado si las tiene perpendiculares é iguales.

Parte 1ª (fig. 53). *Hip.* $AC \perp DB$. Tes. $AD = AB$.

Dem. $DO = OB$ (III. 4), ademas: $AO \perp DB$ hip.;
luego: $AD = AB$ (II, 14.)

Parte 2ª *Dem.* En dicha suposicion el paralelógramo será rectángulo (III. 8.) y juntamente equilátero (hip.) luego será un cuadrado.

Teor. 11. Dos paralelógramos son congruentes, si tienen dos lados respectivamente iguales é igual el ángulo comprendido.

Dem, Por medio de las diagonales opuestas al ángulo igual los paralelógramas pueden descomponerse en dos triángulos congruentes y del mismo modo dispuestos; luego serán congruentes.

Cor. Dos cuadrados son congruentes, si tienen un lado igual,
dos rectángulos, si tienen dos lados adyacentes respectivamente iguales,
dos rombos, si tienen iguales un lado y un ángulo.

§ 10 CONSECUENCIAS IMPORTANTES.

Teor. 12. (fig. 54.) Cuando por el punto medio de un lado de un triángulo se traza una paralela á otro cualquier lado, dividirá al tercero en dos partes iguales, y la recta trazada será igual á la mitad del lado paralelo.

Hip. $AD = DB$ y $DE \ddagger AC$
Tes p. 1ª $BE = EC$, p. 2ª $DE = \frac{1}{2}AC$.

Dem. Trazada $EF \ddagger AB$, será DEFA un paralelógramo, y por eso $\triangle BDF \cong EFC$, por ser $DE = DA = EF$ é iguales los ángulos adyacentes.

De donde para p. 1ª $BE = EC$,

para p. 2ª $DE = FC$,
ademas $DE = AF$ (III. 3),
luego $2DE = FC + AF = AC$ ó $DE = \frac{1}{2} AC$.

Cor. La recta que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralela al tercero; pues tirando por D una paralela á AC pasará por E que es el punto medio, luego juntando D con E, la recta tirada será paralela á AC.

Teor. 13. (fig, 55). Si por el punto medio de uno de los lados no paralelos del trapecio se traza una recta paralela á los lados paralelos, el cuarto lado quedará dividido en dos partes iguales; y ademas la recta trazada será la semisuma de los lados paralelos.

Hip. $BC \ddagger AD$, $BE = EA$ y $EF \ddagger AD$.
Tes p. 1ª $CF = FD$ p. 2ª $EF = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

Dem. Trazemos por F la recta $FH \ddagger AB$ y prolongando FH y BC hasta que se corten en G serán:

BGFE, EFHA y BGHA paralelógramos;

de dónde para p. 1ª: $\triangle GFC \cong HFD$,

por ser $BE = GF = EA = FH$ y dos ángulos adyacentes iguales,

luego $CF = FD$; ademas $CG = HD$.

Para p. 2ª tendremos:

$EF = BG = BC + CG$
$EF = AH = AD - HD$
luego $2EF = BC + AD$ por ser $CG = HD$,
ó $EF = \frac{1}{2}(BC + AD)$.

Cor. Si por los puntos medios de los lados no paralelos de un trapecio se traza una recta, esta será paralela á los otros dos lados; pues tirando por E una paralela á AD pasará por el punto medio F, luego juntando E con F la recta tirada será paralela á AD.

Teor. 14. (fig. 56). En todo cuadrilátero son iguales y paralelas entre sí las rectas, que unen los puntos medios de los lados adyacentes de dos en dos.

Hip. $BE=EA$ y $BF=FC$
$AG=GD$ y $CH=HD$
Tes. $EF \ddagger GH$ y $EF=GH$

Dem. Uniendo C con A tendremos:

y $EE \ddagger AC$ y $EF=\frac{1}{2}AC$ (III. 12. cor).
$GH \ddagger AC$ y $GH=\frac{1}{2}AC$
luego: $GH \ddagger EF$ y $GH=EF$.

Teor. 15. (fig. 57), Las partes de una secante interceptadas por paralelas, que equidistan, son iguales.

Hip. $AB \ddagger A'B' \ddagger$ &a: las perpendiculares ab, cd, ef, gh son iguales entre sí.
Tes. $ac=ce=eg=gi$

Dem. $\triangle abc \cong cde \cong efg \cong ghi$ (II. 8.)
luego: $ac=ce=eg=gi$.

Cor. 1. Si una recta cortada por paralelas queda dividida en partes iguales, las paralelas equidistan unas de otras; puesto que tendremos los mismos triángulos congruentes.

Cor 1. Si várias paralelas dividen á una recta en partes iguales tambien dividirán en partes iguales á todas las otras secantes; puesto que equidistan (cor. 1).

§ 11. PROBLEMAS ELEMENTARES.

Probl. 1º Construir un cuadrado dado el lado.
2º Construir un rombo dado el lado y un ángulo.
3º Construir un rectángulo dados dos lados.
4º Construir un romboide dados los lados y un ángulo.

La resolucion de estos problemas supone la construccion de un triángulo dados dos lados y el ángulo comprendido, lo que es fácil.

Probl. 5ª (fig. 58). Construir un trapecio, dados los cuatro lados a, b, c y d, siendo los primeros *a* y *b* los paralelos, los otros *c* y *d* los oblicuos.

Análisis. Siendo CABD el trapecio pedido, y trazado $AE \ddagger BD$, serán todos los lados del $\triangle CAE$ dados: $CA=c$, $AE=d$, $CE=(b-a)$; ya se vé que formado el $\triangle CAE$ se puede construir el trapecio.

Constr. Trazado $CE=(b-a)$ descríbase desde C y E con los radios c y d dos arcos que se corten en A; prolongado CE hasta D de manera que $CD=b$, tírese $AB \ddagger CD$ é igual á la recta a despues júntese A con C y B con D y será CABD el trapecio pedido.

Dem. 1º CABD un trapecio por ser $AB \ddagger CD$ (constr.)

2º tiene los lados dados

$AC=c$, $AB=a$, $CD=b$ y $a \ddagger b$ (constr.)

luego resta demostrar que $BD=d$

$ED=CD-CE=b-(b-a)=a$

ademas $AB=a$ y $AB \ddagger ED$ (constr.)

luego EABD un paralelógramo (III, 5 caso 2º), de donde se sigue que $AE=BD$; ya sabemos por construccion que $AE=d$, luego tambien $BD=d$.

Determ. La posibilidad del trapecio depende del $\triangle CAE$, lo que es posible si

1º *a* no es igual á *b*.

2º si $(a-b) \begin{matrix} > c-d. \\ < c+d. \end{matrix}$

Cambiando los centros para los radios *c* y *d* tendremos otro triángulo, pero congruente con el primero, y por tanto el trapecio que resultará sera tambien congruente con el primero.

§ 12. APÉNDICE AL CAP. II. y III.

Los cuatro puntos notables de un triángulo.

I. (fig. 59). Las bisectrices de los tres ángulos de un triángulo se cortan en un mismo punto.

Hip. OB bisectriz del $\sphericalangle B$, OA del $\sphericalangle A$.
Tes. OC bisectriz del $\sphericalangle C$.

Dem. Siendo $OD \perp AB$ y $OE \perp BC$ y $OF \perp AC$,

será: $OD=OE$ y $OD=OF$ (II 15), luego $OE=OF$,

de donde $\triangle OEC \cong OFC$ (II, 10, cor.), luego OC bisectriz.

II. (f. 60). Las tres perpendiculares levantadas en los puntos medios de los lados de un triángulo concurren en un mismo punto.

Hip. AD=DB, BE=EC, CF=FA.

y OD ⊥ AB, OE ⊥ BC.

Tes. OF ⊥ AC.

Dem. Júntese O con A, B, C y será:

OB=OA y OB=OC (II, 14) luego OA=OC.

ademas: AF=CF luego: △AFO≅CFO

de donde: ∢AFO=CFO=R ó OF ⊥ AC.

III. (fig. 61.) Las tres alturas de un triángulo se cortan en un mismo punto.

Hip. BD ⊥ AC, CE ⊥ AB, AF ⊥ BC
Tes. BD, CE, AF concurren en un punto O.

Dem. Trazadas por A, B y C paralelas á los lados opuestos se cortarán en los puntos G, H, J, que forman un triángulo, porque las rectas á que son respectivamente paralelas tambien lo forman.
De donde se sigue que las alturas del △ABC son perpendiculares á los lados del △JGH;

ademas: BC=AG y BC=AJ (III. 3.) luego AG=AJ,

AC=GB y AC=BH („) „ GB=BH,

AB=HC y AB=CJ („) „ HC=CJ.

Luego las alturas del △ABC son las perpendiculares medianas á los lados del △JGH, y por eso se cortan en un mismo punto (II).

Expl. La recta que en un triángulo une un vértice con el lado opuesto, se llama trasversal; si vá desde el vértice á la mitad del lado opuesto se llama mediana.

IV. (fig. 62), Las medianas se encuentran en un mismo punto

Hip. BE=EA, BD=DC, CG=GA
Tes. Rectas que unen A y D, C y E, B y G se cortan en el mismo punto O.

Dem. Trazadas AD y CE, juntemos E con D y ademas H é J los puntos medios de OA y OC entre sí y con E y D y serán:

HJ ⫳ AC y HJ=½AC (III. 12 cor.)

y ED ⫳ AC y ED=½AC „

Luego: HJ ⫳ ED y HJ=ED luego: EDJH un paralelógramo (III. 5).
de donde; OD=OH=HA (III. 4 é hip.) ó AO=2OD=⅔AD
y OE=OJ+JC „ ó CO=2OE=⅔CE

Lo que vale de AD y CE, valdrá tambien de AD y BG pues la demostracion es la misma, luego BG cortará AD en un punto O′ donde AO′=2O′D =⅔AD, pero para AD existe un solo punto que tiene esta propiedad, luego O′ será el punto O es decir BG pasará por O.

CAPITULO IV.

Círculo.

§ 13. PROPIEDADES FUNDAMENTALES.

Explicaciones:

1ª Sabemos ya, que el círculo es una figura plana totalmente cerrada de una curva, cuyos puntos todos equidistan de otro interior llamado centro. La curva se llama *circunferencia*, la distancia igual del centro *radio*, y una parte cualquiera de la circunferencia *arco*.

2ª *Cuerda* se llama toda recta que une dos puntos de la circunferencia, y será *diámetro*, si pasa por el centro; el cual por tanto será igual á dos radios.

3ª *Secante* es una recta ilimitada, que corta á la circunferencia en dos puntos.

4ª *Tangente* es la recta, que aun prolongada indefinidamente tiene un solo punto comun con la circunferencia.

5ª *Sector* es una parte del círculo limitada por dos radios y un arco.

6ª *Segmento* es una parte del círculo limitada por un arco y una cuerda.

7ª *Ángulo central* se llama aquel cuyo vértice está en el centro.

Cor 1. Todos los radios de un mismo círculo son iguales, luego tambien todos los diámetros.

Cor 2. No hay mas que un centro en un círculo; porque juntando en otra suposicion estos dos centros por medio de un diámetro comun se seguiría, que los radios no fueran iguales en un círculo relativamente al mismo centro. (fig. 63) Si $OA=OB$, será $O'A>O'B$.

Cor. 3. Los círculos trazados con los mismos radios son congruentes, puesto que poniendo un centro sobre otro coincidirá una circunferencia con otra.

Teor. 1. (fig. 63) El diámetro divide al círculo en dos partes congruentes.

Dem. Doblando la parte ADB por el diámetro AB, necesariamente coincidirá ADB con la parte inferior, porque en otra suposicion los radios en un mismo círculo no serian iguales.

Teor. 2. (fig. 63). El diámetro es mayor que cualquiera otra cuerda.

Tes. $AB>FG$.

Dem. Juntando F y G con el centro O, tendremos:

$OF+OG>FG$ (II, 6)

pero $OF+OG=AB$ luego $AB>FG$.

Teor. 3. (fig. 64). En circunferencias iguales ó en una misma circunferencia ángulos centrales iguales tienen tambien iguales los arcos, cuerdas, sectores y segmentos.

Hip. $OB=O'B'$ y $\sphericalangle AOB=A'O'B'=FOG$.
Tes. arc. $ADB=A'D'B'$; $AB=A'B'$
segmt. $ADB=A'D'B'$; sect. $AOBDA=A'O'B'D'A'$.

Dem. Poniendo O' en O y $O'B'$ en OB, caerá $O'A'$ en OA, por ser $\sphericalangle A'O'B'=AOB$ y $O'A'=OA$ (hip.), luego caerá el arc. $A'D'B'$ en ADB puesto que los círculos son congruentes, y $A'B'$ en AB ó todas las partes sobre sus correspondientes.

Lo mismo vale relativamente del ángulo FOG.

Teor. 4. (fig. 64). En circunferencias iguales ó en una misma circunferencia arcos iguales tienen iguales los ángulos centrales, cuerdas, sectores y segmentos.

Dem. Poniendo O' en O y $A'O'$ en AO, caerá el arc. $A'D'B'$ en ADB por ser iguales, luego todas las partes caerán sobre sus correspondientes.

Cor. El teorema recíproco vale tambien completamente de las cuerdas, segmentos y sectores iguales y se demuestra por medio de la superposicion.

Teor. 5. (fig. 65). En circunferencias iguales ó en una misma circunferencia á mayor arco corresponde mayor ángulo central y mayor cuerda, si el arco es menor que la semicircunferencia.

Hip. arc. $ADB>FGE$ y $AO=FO'$.
Tes. $\sphericalangle AOB>FO'E$ y $AB>FE$.

Dem. Colocando O' en O y $O'F$ sobre OA, ademas arc. FGE en la direccion del arc. ADB, caerá el punto E entre A y B por ser arc. $FGE<ADB$; sea v. gr. en el punto E', luego juntando E' con O y A serán:

	1º $\sphericalangle FO'E=AOE'$	y	2º $FE=AE'$
pero	$\sphericalangle AOE'<AOB$	y	$AE'<AB$ (II, 11)
luego	$\sphericalangle FO'E<AOB$	y	$FE<AB$.

Teor. 6. (fig. 65). En circunferencias iguales ó en una misma circunferencia, el mayor ángulo central tiene arco mayor y tambien mayor cuerda, si es menor que dos rectos.

Hip. $\sphericalangle AOB>FO'E$ y $AO=FO'$.
Tes. arc. $ADB>FGE$ y $AB>FE$.

Dem. Poniendo O' en O y $O'F$ en OA, caerá $O'E$ dentro del $\sphericalangle AOB$ por ser $\sphericalangle FO'E<AOB$, sea v. gr. en OE', luego juntando E' con A tendremos:

	arc. $ADE'=FGE$	y	$AE'=FE$
pero	arc. $ADE'<ADB$	y	$AE'<AD$ (II, 11)
luego	arc. $FGE<ADB$	y	$FE<AD$.

Cor. Lo mismo vale de las cuerdas desiguales relativamente á los arcos y ángulos centrales, lo que se demuestra de la misma manera.

§ 14 PROPIEDADES DE LAS CUERDAS.

Teor. 7. (fig. 66). El radio perpendicular á una cuerda divide en dos partes iguales á esta, al ángulo central y al arco correspondiente.

Hip. $OC\perp AB$
Tes. $AD=DB$, $\sphericalangle AOC=BOC$ y arc. $AC=CB$.

Dem. $\triangle AOB$ isósceles y $OD\perp AB$ (hip.)

luego $AD=DB$ y $\sphericalangle AOC=BOC$ (II. 13),
de donde arc. $AC=CB$ (IV. 3).

Teor. 8. (fig. 66). El radio que divide á una cuerda en dos partes iguales, es perpendicular á esta.

Hip. AD=DB
Tes. OC⊥AB

Dem. △AOB isósceles y AD=DB (hip.) luego OC⊥AB (II 13).

Cor. 1. La recta perpendicular á la cuerda en su punto medio pasará por el centro; porque la recta, que une O con D será perpendicular á AB.

Cor. 2. El radio, que divide al ángulo central en partes iguales, dividirá tambien en partes iguales al arco correspondiente (IV. 3) y á la cuerda (II 13).
Cor. 3. Lo que vale del ángulo central vale del arco (IV 4.)

Teor. 9. (fig. 67). **Los arcos comprendidos entre cuerdas paralelas son iguales.**

Hip. AB ∦ CD.
Tes. arc. AC=arc. DB.

Dem. Bajando desde O el radio OE perpendicular á las cuerdas paralelas, tendremos:

arc. ACE=BDE (IV 7.)
y arc. CE=DE
luego: arc. ACE—arc. CE=arc. BDE—arc. DE
ó arc. AC=arc. BD.

Teor. 10. (fig. 68). **Cuerdas iguales equidistan del centro.**

Hip. AB=CD, OE⊥AB y OF⊥CD.
Tes. OE=OF.

Dem. AE=½AB y CF=½CD (IV 7)
luego AE=CF por ser AB=CD (hip.)
ademas OA=OC y ∢OEA=OFC=R (hip.)
luego △OEA≅OFC (II, 10 cor.), luego OE=OF.

Teor. 11. (fig. 68). **Cuerdas equidistantes del centro son iguales.**

Hip. OE=OF, OE⊥AB y OF⊥CD.
Tes. AB=CD.

Dem. △OEA≅OFC (II, 10 cor.), luego AE=CF
pero AE=½AB y CF=½CD (IV. 7)
luego AB=CD.

Teor. 12. (fig. 69.) **Si dos cuerdas son desiguales, la mayor está mas cerca del centro.**

Hip. AB>CD, OE⊥AB y OF⊥CD.
Tes. OE<OF.

Dem. Siendo BG=DC y OH⊥BG, serán:

OH>OJ>OE pero OH=OF (IV 10)
luego OF>OE.

Teor. 13. (fig. 69). **De dos cuerdas es la mayor la que mas se acerca al centro.**

Dem. La cuerda AB por el Teor. 10 no puede ser igual á CD; por el Teor. 12. no es menor, luego será mayor.

Teor. 14. (fig. 70) **Tres puntos que no están en línea recta determinan la posicion de una circunferencia.**

Hip. B, A y C no están en línea recta.
Tes. Por B, A y C puede pasar una circunferencia y no mas.

Dem. Siendo M el punto medio de AB y N de CA, y ademas MP⊥AB y NS⊥AC, sabemos que todas las circunferencias que pasan por A y B, tienen su centro en MP; del mismo modo todas las circunferencias que pasan por A y C tienen su centro en NS (IV, 8 cor. 1.)

Luego si una circunferencia pasa juntamente por B, A y C tendrá su centro solo en el punto O donde se cortan MP y NS, lo que siempre tendrá lugar porque PM no es perpendicular á AC (hip. y I 10 cor.)

En efecto pasará una circunferencia por B, A y C, puesto que OB=OA=OC (II 14): luego una sola puede pasar puesto que un solo centro O es posible.

§ 15. SECANTES Y TANGENTES.

Teor. 15. (fig. 71) **La secante no tiene mas que dos puntos comunes con la circunferencia.**

Dem. Si D fuera un tercer punto, seria

OB=OA=OD

y por tanto $\sphericalangle$B= A =δ lo que es contra II, 1.

Cor. Por tres puntos que están en línea recta no puede pasar una circunferencia.

Teor. 16. (fig. 71). La recta perpendicular al radio en su punto extremo, es tangente á la circunferencia.

Hip. AO $\perp$ MN.
Tes. MN es tangente, ó tiene solo el punto A comun con la circunferencia.

Dem. Para todos los otros puntos de MN, por ejemplo B tendremos siempre OB>OA por ser $\sphericalangle$A=R, luego ningun otro punto está en la circunferencia.

Teor. 17. (fig. 71). La tangente es perpendicular al radio dirigido al punto de contacto.

Dem. Todos los puntos de NM ademas de A están fuera del círculo (hip), luego OA es la distancia mas corta desde O hasta MN y por tanto OA $\perp$ NM (II, 5 cor. 2).
Cor. 1. Por un punto de una circunferencia no puede tirarse mas que una tangente; puesto que por el punto A no se puede levantar al radio OA mas que una perpendicular.
Cor. 3. La recta cuya distancia al centro es mayor que el radio, no tiene ningun punto comun con la circunferencia; pero si la distancia fuese menor que el radio, dicha recta tendrá comunes con la circunferencia dos puntos, y por tanto será secante. En efecto, en el primer caso el punto mas cercano está fuera de la circunferencia, luego ningun otro punto puede estar en ella; en el caso segundo el punto mas cercano está dentro de la circunferencia, luego la recta prolongada la cortará en dos puntos.

§. 16. ÁNGULOS.

Explicaciones.

1ª Se llama *ángulo inscripto,* aquel cuyo vértice está en la circunferencia y sus lados son cuerdas.
2ª Se llama *ángulo semiinscripto* el que ademas de tener su vértice en la circunferencia está formado por una tangente y una cuerda.
3ª Se llama *ángulo tangential* aquel que está formado por dos tangentes.

Teor. 18. El ángulo inscripto es igual á la mitad del ángulo central formado sobre el mismo arco.
Advertencia: tres casos pueden ocurrir
1º (fig. 72): que el centro esté en un lado del ángulo inscripto.
2º (fig. 73): que el centro esté dentro del ángulo inscripto:
3º (fig. 74). que el centro esté fuera del ángulo inscripto.

Tes. $\sphericalangle$BAD=$\sphericalangle$ $\frac{1}{2}$ BOD.

Dem. Caso 1º $\sphericalangle$BOD=A+B; pero $\sphericalangle$A=B (II 2)
luego $\sphericalangle$BOD=2A ó $\sphericalangle$A=$\frac{1}{2}$BOD.

Caso 2º Trazada la recta AOE serán:

$\sphericalangle$BOE=2BAE y $\sphericalangle$DOE=2DAE

luego $\sphericalangle$BOE+DOE=2(BAE+DAE)=2BAD

ó $\sphericalangle$BOD=2BAD ó $\sphericalangle$BAD=$\frac{1}{2}$BOD.

Caso 3º Trazada la recta AOE serán:

$\sphericalangle$BOE=2BAE y $\sphericalangle$DOE=2DAE

luego $\sphericalangle$BOE—DOE=2(BAE—DAE)=2BAD

ó $\sphericalangle$BOD=2BAD ó $\sphericalangle$BAD=$\frac{1}{2}$BOD.

Cor. Los ángulos inscriptos sobre el mismo arco son iguales.

Teor. 19. (fig. 75) El ángulo inscripto, cuyos lados abrazan una semicircunferencia, es recto.

Hip. arc. ADB semicircunferencia ó la recta AOB diámetro.
Tes. $\sphericalangle$ADB=R

Dem. Trazada la recta DOE serán:

$\sphericalangle$AOE=2ADE y $\sphericalangle$BOE=2BDE

luego $\sphericalangle$AOE+BOE=2 (ADE+BDE)=2ADB

ó 2R=2ADB ó ADB=R

Teor. 20. (fig. 76). El cuadrilátero inscripto en una circunferencia tiene la suma de dos ángulos opuestos igual á dos rectos.

Tes. $\sphericalangle$B+D=2R

Dem. Tírense los radios OA y OC y será:

$\sphericalangle$D=$\frac{1}{2}\sphericalangle$ cóncavo AOC y $\sphericalangle$B=$\frac{1}{2}\sphericalangle$ convexo AOC, luego $\sphericalangle D+B=\frac{1}{2}(\sphericalangle \text{cóncavo } AOC+\sphericalangle \text{convexo } AOC)=2R.$

Teor. 21. (fig. 77) **El ángulo semiinscripto es igual á la mitad del ángulo central formado sobre el mismo arco.**

Hip. AT tangente en el punto A.

Tes. $\sphericalangle BAT=\frac{1}{2}BOA.$

Dem. Trazado $OD \perp BA$ será:

$\sphericalangle DOA+DAO=R=DAO+BAT$ (IV. 17).

luego $\sphericalangle DOA=BAT$ pero $\sphericalangle DOA=\frac{1}{2}BOA$ (IV. 7).

luego $\sphericalangle BAT=\frac{1}{2}BOA.$

Teor. 22. (fig. 78). **El ángulo tangencial queda dividido en dos partes iguales por la recta que une el centro y el vértice de este ángulo; ademas las tangentes son iguales.**

Hip. AC y AB tangentes en los puntos C y B.
Tes. $\sphericalangle OAB=OAC$ y $AB=AC.$

Dem. Juntando O con C y B tendremos:

$\sphericalangle OBA=OCA=R$ (IV. 17)

luego $\triangle OAB\cong OAC$ (II. 10. cor.)
y por tanto 1º $\sphericalangle OAB=OAC$, 2º $AB=AC.$

§. 14. DOS CÍRCULOS.

Explicaciones:

1º Se llama *línea central* la recta, que une los centros de dos círculos.
2º Dos círculos se tocan si tienen un solo punto comun, pero se cortan, si tienen dos puntos comunes.
3º En los teoremas denotamos por C la central, por R el radio mayor y por *r* el radio menor, excepto los casos en donde R=r.
Cor. Dos círculos no pueden tener dos puntos comunes situados en la central, pues si así fuese tendria al ménos un círculo dos radios desiguales.

Teor. 23. **Dos círculos no se pueden cortar en mas que dos puntos,**

Dem. Dos círculos no se pueden cortar en tres puntos que están en línea recta (IV. 15.); ademas no se pueden cortar en tres puntos, que no están en una recta, puesto que ellos determinan un círculo (IV. 14). Luego se cortarán solamente en dos puntos.

Teor. 24. (fig. 79). **Cuando tienen dos circunferencias un punto comun en un lado de la central, lo tienen tambien en el otro.**

Hip. O y O′ los centros de los círculos que tienen el punto A comun.

Tes. Hay otro punto comun debajo de OO′,

Dem. Bajando desde A una perpendicular á OO′, sea AB, y prolongando AB hasta A′, de modo que BA=BA′, digo, que los círculos se cortan tambien en A′.
Para demostrarlo unamos O y O′ con A y A′, y serán:

$\triangle OBA\cong OBA'$ (II. 7.) luego $OA=OA'$
$\triangle O'BA\cong O'BA'$ („) „ $O'A=O'A'$

De donde se sigue, que A′ es un punto que pertenece á las circunferencias, cuyos centros son O y O′.

Teor. 25. (fig. 79), **La cuerda comun á dos círculos es perpendicular á la central y queda dividida por esta en dos partes iguales.**

Hip. AA′ la cuerda comun.
Tes. $AA' \perp OO'$ y $AB=A'B.$

Dem. $\triangle OAO'\cong OA'O'$ (II 9)

luego $\sphericalangle AOB=A'OB$; ademas $OA=OA'$ (hip.)

luego 1º $OB \perp AA'$ y 2º $AB=A'B$ (II 13).

***Teor. 26**. (fig. 80). **Dos círculos se cortan si juntamente se verifica:**

$$C \begin{cases} >R-r \\ <R+r \end{cases}$$

Hip. O el centro del radio R y O′ el del r, ademas $R \geqq r$

Dem. *Caso* 1º (fig. 80a) $R>C.$

Siendo $OA=OA'=R$, donde A fuera de OO′ (hip.), será

* *Este teorema se puede expresar tambien:*
Tres rectas determinan un triángulo si la suma de dos es mayor que la tercera, y su diferencia menor que aquella; luego es el invertido de II. 6.

$r=O'B$, es decir $>O'A$; pues si fuese $O'A=r$, seria $R-r=C$ (contra hip.), ó si fuese $O'A>r$ por ej. $r=O'M$, seria $R-r=OO'+MA$, luego: $R-r>C$ (contra hip.); luego será el punto B fuera de $O'A$.

Ademas siendo tambien $O'B'=r$, estará el punto B' dentro O' y A' por ser $r\leqq R$.

Ahora describiendo una semicircunferencia encima de OO' desde O con el radio $R=OA=OA'$ tendremos una curva continua entre A y A'; haciendo lo mismo desde O' con el radio $r=O'B=O'B'$ necesariamente cortará la semicircunferencia que nace, á la primera en un punto encima de OO', porque cada curva continua entre B' y B y encima de OO' debe cortar á la primera circunferencia.

Caso 2º (fig. 80b) $R=C$.

Siendo $R=OO'$ $(=OA)=OA'$, donde A se confunde con O' (hip.) será por tanto $r=O'B$, es decir >0, lo que es evidente; ademas siendo tambien $O'B'=r$, estará el punto B' dentro de $O'A'$ por ser $r\leqq R$.

Ahora describiendo &a. palabra por palabra como arriba.

Caso 3º (fig. 80c.) $R<C$.

Siendo $OA=OA'=R$ de donde A estará entre O y O' (hip.) y será $O'B=r=O'B'$, es decir $>O'A$; pues si fuese $O'A=r$, seria $R+r=OO'$ (contra hip.), ó si fuese $O'A>r$ p. epl. $r=O'M$, seria $R+r=OA+O'M$, luego: $R+r<OO'$ (contra hip.)

Ademas el punto B' donde $O'B'=r$ estará tambien entre O' y A' por ser $r\leqq R$.

Ahora describiendo &a. palabra por palabra como arriba.

Luego dos círculos bajo la condicion: $C\left\{\begin{matrix}<R+r\\>R-r\end{matrix}\right.$ tienen un punto comun en un lado de la central, y por lo tanto lo tienen tambien en el otro (IV 24) ó se cortan.

Teor. 27. (fig. 81). Dos círculos se tocan exteriormente, si $C=R+r$.

Hip. $C=OO'=R+r$, O es el centro para R y O' para r, ademas $R\geqq r$.

Dem. Siendo $OA=R$, será $O'A=r$, luego estos dos círculos tienen comun el punto A, y ningun otro fuera de la recta OO', pues seria $OO'<R+r$ (contra hip.)

Ademas digo, que se deben tocar exteriomente, porque levantando en A la recta NM perpendicular á OO', sabemos que NM será la tangente comun (IV 17), y por eso todos los puntos del círculo, cuyo centro O' estarán á la derecha y los del otro

círculo á la izquierda de MN, y por tanto el primer círculo no puede cortar al segundo ni estar comprendido en él.

Teor. 28. (fig. 82). Dos círculos se tocan interiormente si $C=R-r$.

Hip. $C=OO'=R-r$; O el centro para R y O' para r, $R>r$.

Dem. 1º O' está dentro del círculo mayor puesto que $OO'<R$.

2º Prolongando OO' hasta que corte al círculo mayor en A, estará tambien el punto A en un punto del círculo menor, puesto que $O'A=R-OO'$, pero $r=R-OO'$ (hip.), luego $r=O'A$, es decir, A un punto comun para los dos círculos.

3º Las circunferencias no tienen ningun otro punto comun: no en la misma recta por ser $R>r$, tampoco fuera de esta, pues si lo fuese seria $OO'>R-r$; luego los dos círculos se tocan.

4º Se tocan interiormente, porque levantando en el punto A una perpendicular á OO', sea MN, será esta una tangente á los dos círculos (IV 16). y por eso los círculos están al mismo lado de MN, de modo que el círculo menor está todo en el mayor; puesto que para todo otro punto P escepto A de la circunferencia, cuyo radio es mayor, vale siempre $O'P>r$, porque $OO'>R-O'P$, pero $OO'=R-r$, luego $O'P>r$, y por tanto esto tendrá lugar mucho mas para un punto fuera del círculo mayor, por ej. P'.

Cor. La perpendicular á la central de dos círculos en el punto de contacto es la tangente comun á estos; porque los radios forman la central.

Teor. 29. (fig. 83) Dos círculos son totalmente exteriores si $C>R+r$.

Hip. $R\geqq r$ y $C=OO'$.

Dem. Tómese entre O y O' un punto D de modo que $OD>R$ y $O'D>r$ lo que es posible por ser $OO'>R+r$ (hip.), y levantando en D la perpendicular MN, sabemos que todos los puntos de MN están fuera de los dos círculos, luego si uno está en un lado de MN, estará otro en el lado opuesto de MN, y por tanto son exteriores uno de otro.

Teor. 30. (fig. 84). Dos círculos son totalmente interiores uno de otro, si $C<R-r$.

Hip. $R > r$ y $C = OO'$.

Dem. 1º O' está dentro del círculo mayor, puesto que $OO' < R$.

2º Para un punto cualquiera P de la circunferencia, cuyo radio es el mayor, tendremos siempre $C'P > r$,

porque $OO' > R - O'P$ y $OO' < R - r$
luego $R - O'P < R - r$
luego $O'P > r$

y por tanto con mas razon para un punto fuera del círculo mayor, por ej. P'; luego todos los puntos del círculo menor están dentro del círculo mayor.

Cor. Cada uno de los teoremas desde el teor. 26 hasta el teor. 30 vale recíprocamente; la razon general es porque en otra suposicion tendremos una contradiccion con uno ú otro de dichos teoremas, en los cuales todos los casos posibles están establecidos.

Vamos á ver en particular:

1º Si dos círculos se cortan será juntamente $C \begin{cases} < R+r \\ > R-r \end{cases}$

Dem. $C > R+r$ fuera contra 29; $C = R+r$ fuera contra 27
$C < R-r$ „ 30; $C = R-r$ fuera „ 28.

2º Si dos círculos se tocan exteriormente, será $C = R+r$.

Dem. Suponiendo que $C > R+r$ fuera contra 29,

„ $C < R+r$ seria: $\begin{cases} C > R-r \text{ contra } 26, \\ \text{ó } C = R-r \quad „ \quad 28, \\ \text{ó } C < R-r \quad „ \quad 30. \end{cases}$

3º Si dos círculos se tocan interiormente, será $C = R-r$.

Dem. Suponiendo que $C < R-r$ fuera contra 30.

„ $C > R-r$ seria: $\begin{cases} C > R+r \text{ contra } 29, \\ \text{ó } C = R+r \quad „ \quad 27, \\ \text{ó } C < R+r \quad „ \quad 26. \end{cases}$

4º Si dos círculos son totalmente exteriores uno á otro, será $C > R+r$.

Dem. Suponiendo que $C = R+r$ fuera contra 27,

„ $C < R+r$ seria: $\begin{cases} C > R-r \text{ contra } 26, \\ \text{ó } C = R-r \quad „ \quad 28, \\ \text{ó } C < R-r \quad „ \quad 30. \end{cases}$

5º Si dos círculos son totalmente interiores uno á otro, será $C < R-r$.

Dem. Suponiendo que $C = R-r$ fuera contra 28,

„ $C > R-r$ seria $\begin{cases} C > R+r \text{ contra } 29, \\ \text{ó } C = R+r \quad „ \quad 27, \\ \text{ó } C < R+r \quad „ \quad 26. \end{cases}$

§ 18. PROBLEMAS ELEMENTARES ACERCA DEL CÍRCULO.

Probl. 1. (fig. 85) Dividir un arco dado en dos partes iguales

Constr. Levantemos en D, punto medio de la cuerda AB, una perpendicular á esta, y donde esta corte al arco AB en el punto E será arc. AE=BE.

Dem. DF es perpendicular á la cuerda AB en su punto medio y por eso pasa por el centro (IV. 8, cor.), luego es el radio perpendicular á la cuerda y por tanto divide al arco correspondiente en dos partes iguales (IV, 7).

Probl. 2º (fig. 86). Hallar el centro de una circunferencia ó un arco.

Constr. Siendo A, C y B tres puntos de la circunferencia ó el arco dado, y D y E los puntos medios de las cuerdas respectivas, levantemos en D y E perpendiculares á AC y CB sean DM y EN, y prolongando estas hasta que se corten en O, será O el centro.

Dem. $DM \perp AC$ en su punto medio, luego pasa por el centro ademas $EN \perp BC$ en su punto medio, luego pasa por el centro, y por eso el centro estará en el punto O donde se cortan.

Probl. 3 (fig. 87). Trazar una circunferencia que pase por tres puntos A, B y C que no están en línea recta.

Constr. Siendo D y E los puntos medios de AB y CB, y levantando en D y E perpendiculares, unamos el punto O donde se cortan con B, y describamos desde O con OB una circunferencia que pasará tambien por A y C.

Dem. Uniendo O con A y C, sabemos que $OA = OB = OC$ (II 14), luego dicha circunferencia pasa tambien por A y C.

Probl. 4. Por un punto dado en una circunferencia dirigir una tangente á esta.

Resolucion. Sabemos que la tangente es perpendicular al radio en el punto de contacto (IV 17); de lo cual fácil se deducen la construccion y demostracion.

Probl. 5 (fig. 88). Desde un punto A fuera de un círculo dirigir una tangente á la circunferencia.

Constr. Uniendo A con O describamos al rededor de AO como diámetro una circunferencia, y juntando los puntos B y B', donde se corten las dos circunferencias, serán AB y AB' tangentes al círculo primero.

Dem. Uniendo O con B y B' será $\sphericalangle$ABO=R=AB'O (IV 19) luego: AB y AB' tangentes (IV 16).

Probl. 6. (fig. 89). Describir una circunferencia tangente á los tres lados de un triángulo dado ABC.

Constr. Tracemos las bisectrices del $\sphericalangle$A y B y desde el punto O, donde se cortan bajemos una perpendicular á AB sea OD; ahora describamos desde O como centro una circunferencia con OD y tendremos el círculo pedido.

Dem. Bajando desde O perpendiculares á AC y BC, sean estas OE y OF, tendremos: OE=OD=OF (II 15), luego la circunferencia trazada pasa por los puntos D, E y F, ademas AC $\perp$ OE, BC $\perp$ OF, AB $\perp$ OD (Constr.), luego dichos lados son tangentes á la circunferencia trazada.

Probl. 7 (fig. 90). Describir sobre una recta dada m un arco capaz de un ángulo α; es decir: sobre dicha recta como cuerda describir un arco, de modo que todos los ángulos inscriptos, cuyos lados pasen por los puntos extremos de la recta dada, sean iguales al ángulo dado α.

Constr. Siendo AB=m, tracemos en el punto medio D la recta DC $\perp$ AB, y haciendo el $\sphericalangle$DEG=α tracemos BJ $\ddagger$ GE; desde el punto O, donde se cortan DC y BJ, describamos con OB una circunferencia, y será el arc. AKB el pedido.

Dem. 1° La circunferencia pasa por A por ser AD=BD (II 14).

2° Uniendo un punto cualquiera H del arc. AKB con A y B será $\sphericalangle$AHB=½AOB (IV 18)=DOB (IV 7)=DEG (I 10) =$\sphericalangle\alpha$(Constr).

CAPITULO V.

Areas de las figuras rectilíneas.

Explicaciones.

1ª Para determinar el área de una figura, esta debe medirse.

2ª Medir una extension es determinar cuántas veces la unidad de medida está contenida en ella.

3ª La unidad de medida es arbitraria; generalmente úsase el metro relativamente á la longitud de una línea.

4ª Por unidad para medir las áreas tómase el cuadrado, cuyo lado es la unidad de longitud.

5ª Cuando queremos medir un triángulo, cuadrilátero ó en general un polígono por el cuadrado de la unidad, es menester reducir estas figuras al rectángulo; y por eso debemos averiguar cuándo las figuras rectilíneas son iguales, es decir, cuándo tienen el área igual, aunque no sean congruentes.

6ª Suponemos que las figuras congruentes son iguales ó tienen el área igual, lo que es evidente.

7ª Un rectángulo ABDC (fig. 93) se denota muchas veces por dos letras opuestas AD ó BC.

8ª La proyeccion de una recta AB (fig. 91a) respectivamente á otra recta MN se obtiene bajando de A y B perpendiculares á MN, y la parte CD será la proyeccion; luego (fig. 91b) AD es la proyeccion de AB á MN.

9ª Se llama medida comun de dos cantidades la que está perfectamente contenida en aquellas; y será la mayor comun medida, si toda otra cantidad mayor no está perfectamente contenida en las dos.

§ 19. MEDIDA COMUN DE DOS RECTAS.

Probl. (fig. 92). Hallar la mayor medida comun entre dos rectas dadas *a* y *b*.

Resol. Determinemos cuántas veces la recta menor b esté contenida en a; sea m veces y el resto c; despues cuántas veces c en b, sea n veces y el resto d; luego cuántas veces d en c, sea p veces y el resto e; en seguida cuántas veces e en d, sea r veces sin resto; y tendremos e como la mayor medida comun.

Dem. 1° e es una medida comun entre a y b.

Nota: m, n, p, r son números enteros.

Tenemos: De donde se saca:

$a=mb+c$	e está perfectamente contenida en d, puesto que $d=re$
$b=nc+d$	e........................ en c, por serlo en pd
$c=pd+e$	e........................ en b, „ „ en nc y d
$d=re$	e........................ en a, „ „ en mb y c.

2º e es la mayor medida comun entre a y b.

Si e no fuese la mayor medida comun entre a y b, sea $f>e$; de donde se seguiria que f estaria perfectamente contenida en c, porque lo está cabalmente en $a=mb+c$, pero tambien en mb, luego en c; ademas en d, porque en $b=nc+d$, pero tambien en nc, luego en d; por la misma conclusion tendriamos que f estaria perfectamente contenida en e; porque en $c=pd+e$, pero en pd lo hemos visto, luego en e; lo que es contra la suposicion que sea $f>e$. ¿De dónde es este absurdo resultado? No de las conclusiones que son exactas, luego de la suposicion, que sea $f>e$ para mayor medida comun.

Ejemplo concreto (fig. 96).

$$\begin{array}{lll} AB=2CD+EB & \text{luego} & EB=11JB \\ CD=1EB+GD & \text{y} & CD=16JB \\ EB=2GD+JB & \text{y} & AB=43JB \\ GD=5JB & & \end{array}$$

Advertencia: 1ª Podemos determinar de otra manera la medida comun entre dos rectas, tomando la unidad de medida, y viendo cuántas veces una parte de ella está contenida perfectamente en a y b; para hallar entónces la mayor comun medida es menester determinar segun las reglas del álgebra el máximo comun divisor.

2ª Puede suceder, como veremos, que las dos rectas no tengan una medida comun, y en este caso se dicen incomensurables.

3ª Como sabemos por el álgebra, son tambien números incomensurables, v. gr. 2 y $\sqrt{2}$; por esto muchas veces se espresan las rectas incomensurables por números que lo son.

4ª Este método para determinarr la mayor medida comun aplícase á todas las cantidades que pueden medirse.

§ 20. MEDIDA DE LOS RECTÁNGULOS.

Teor. 1. Si la altura y base de un rectángulo están espresadas por números que tienen relacion á la unidad de longitud, el producto de la base por la altura expresará cuántas veces la unidad de área está contenida en el rectángulo; ó en otras palabras: El área del rectángulo es igual al producto de su base por su altura.

Tres casos pueden ocurrir:

1º si la altura y la base se expresan por números enteros,
2º si una ó las dos por números fraccionarios,
3º si una ó las dos por números incomensurables.

Dem. para el caso 1º (fig. 93a). Sea la unidad de longitud Aa(=AF) m (3) veces contenida en AC y en AB s(5) veces; trazando por F una paralela á AC el Rctg. AE está s(5) veces contenido en el Rctg. AD; pero el cuadrado de la unidad Ab está m(3) veces contenido en el Rctg. AE, luego el cuadrado de la unidad Ab está contenido en el Rctg. AD ms(15) veces.

Caso 2º (fig. 93b) puede reducirse al primero.

Sea la unidad de longitud Aa $\frac{r}{s}$ veces contenida en AC y $\frac{p}{q}$ veces en AB, ó $\frac{rq}{sq}$ veces en AC y $\frac{ps}{sq}$ veces en AB.

De donde re sigue que el lado del cuadrado cuya longitud $=\frac{1}{sq}(=A\alpha)$, está perfectamente contenida en AB y lo mismo en AC, luego dicho cuadrado (AB) está contenido r.q.p.s veces en el Rctg AD.

Ademas el cuadrado, cuyo lado $=\frac{1}{sq}(=A\alpha)$ está contenido en el cuadrado de la unidad Ab segun el caso 1º $(sq)^2$ veces.

Luego tendremos:

$$\text{Rctg. } AD=r.q.p.s\times\square A\beta \text{ y } \square A\beta=\frac{1}{(sq)^2}\times\square Ab,$$

$$\text{luego Rctg. } AD=r.q.p.s\times\frac{1}{(sq)^2}\times\square Ab=\frac{rp}{sq}\square Ab.$$

Nota. Si solamente un lado se expresa por un número fraccionario, la demostracion será la misma.

Caso 3º (fig. 93c).

Dem. 1ª Siendo ambos lados incomensurables, es decir, expresados por números irracionales, por ej. $AB=\sqrt{7}$ y $AC=\sqrt[3]{5}$, será el valor del Rctg. $AD=\sqrt{7}.\sqrt[3]{5}$.

$$\sqrt{7}=2{,}645751\ldots.\ \sqrt[3]{5}=1{,}709975\ldots.$$

Tomemos para AB y AC los valores aproximados: 2,64 y 1,70 y multiplicando tendremos un producto que se aproxima al valor justo del Rctg. AD; luego procediendo así podemos hacer que la diferencia entre el valor exacto y el aproximativo sea menor que toda cantidad asignable.

De donde debemos concluir que el valor exacto del Rctg. AD se expresa por el producto $\sqrt{7}.\sqrt[3]{5}$.

Lo que vale de dichos números valdrá de todos los otros ncomensurables.

Dem. 2ª mas científica suponiendo (Cap. VI § 24.)

Siendo m y n los números incomensurables que expresan los lados AC y AB, sean m′ y n′, números comensurables y variables, de modo que el límite de m′=m y el de n′=n, luego el límite de m′.n′ será m.n.

Ademas sea el Rctg. AR variable de modo que su área siempre sea igual á m′.n′, luego su límite será el Rctg. AD, porque aproximándose n′(=AM) á AC y n′(=AN) á AB, se aproximará el Rctg. AR al Rctg. AD.

Reuniendo en fórmulas lo dicho tendremos

	m′n′=Rctg. AR
luego	lim.m′n′=lim. Rctg. AR
pero	lim.m′n′=m.n y lim. Rectg. AR=Rctg. AD
luego	m.n=Rctg. AD.

Explicacion. Dos números cualesquiera, a y b siempre pueden representarse geométricamente por rectas, y conforme al teorema, que acabamos de demostrar, quedará representado el producto a.b por el rectángulo, que tiene las rectas a y b por lados. Así es que cualquier producto de dos números puede considerarse gráficamente como área de un rectángulo, cuyos lados sean los dos factores; y recíprocamente el área de cualquier rectángulo con los lados a y b se designa simplemente, escribiendo en forma algébrica el producto a.b ó $a\times b$. Con lo cual un producto de la forma $a\times b$ ó a.b tratando de geometría principalmente nos designará una cantidad geométrica, á saber, el área de dicho rectángulo, formada por las rectas a y b.

Lo mismo se aplica á un cuadrado, cuyo lado es la recta c ó AB, y por tanto se representa por c^2 ó AB^2.

§ 21 CONFORMIDAD DE ALGUNAS EXPRESIONES ALGÉBRICAS CON LAS GEOMÉTRICAS.

Teor. 2 (fig. 94). El rectángulo formado por la recta *a* y por la suma ó diferencia de otras dos rectas *b* y *c*, es igual á la suma ó la diferencia de dos rectángulos formados, uno por a y b otro por a y c; es decir

$$(b\pm c)\times a=a\times b\pm a\times c$$

Dem. 1ª p.	Rctg. CE=(b+c)×a
	„ AE=a×b
	„ CF=a×c
pero	Rctg. CE=AE+CF
luego	(b+c)×a=a×b+a×c

Dem. 2ª p.	Rctg. C′E=(b—c)×a
	„ AE=a×b
	„ C′F=a×c
pero	Rctg. C′E=AE—C′F
luego	(b—c)×a=a×b—a×c.

Teor. **3.** (fig. 95). El cuadrado construido sobre la suma de dos rectas *a* y *b* es igual á la suma de los cuadrados construidos sobre estas dos rectas, mas el doble del rectángulo formado por *a* y *b*; es decir:

$$(a+b)^2=a^2+2a\times b+b^2.$$

Dem. □AE=□AG+□GE+Rctg. GC+Rctg. GD

en donde el Rctg. GC=GD por ser los lados iguales

luego	□AE=□AG+□GE+2 Rctg. GC
pero	□AE=$(a+b)^2$, □AG=a^2, □GE=b^2 y Rctg. GC=a×b
luego	$(a+b)^2=a^2+2a\times b+b^2$.

Teor. **4.** (fig. 96). El cuadrado construido sobre la diferencia de dos rectas *a* y *b* es igual á la suma de los cuadrados construidos sobre *a* y *b* ménos el doble del rectángulo formado por *a* y *b*; es decir:

$$(a-b)^2=a^2-2.a\times b+b^2.$$

Dem. La figura manifiesta que:

	□EG=CL y Rctg. DG=CG,
luego	□AE=□AG+□CL—2 Rctg. CG
pero	□AE=$(a-b)^2$, □AG=a^2, □CL=b^2, Rctg CG=a×b
luego	$(a-b)^2=a^2-2.a\times b+b^2$.

Teor. **5.** (fig. 97). El rectángulo formado por la suma y diferencia de dos rectas *a* y *b* es igual á la diferencia de los cuadrados formados por *a* y *b*; es decir:

$$(a+b)\times(a-b)=a^2-b^2.$$

Dem. Rctg. AE=AK+BE, en donde el Rctg BE=HG=DG—DJ

luego	Rctg. AE=AK+DG—DJ en donde AK+DG=AG
luego	Rctg. AE=□AG—□DJ
pero	Rctg. AE=(a+b)×(a—b) y □AG=a^2, □DJ=b^2
luego	$(a+b)\times(a-b)=a^2-b^2$.

Advertencia. Pueden añadirse otras fórmulas algébricas y demostrarse de la misma manera, pero basta lo hecho para la aplicacion y para ver la íntima union entre el Álgebra y la Geometria.

§ 22. IGUALDAD DE LAS ÁREAS DE LAS FIGURAS RECTILÍNEAS.

Teor. 6. (fig. 98). Las áreas de dos paralelógramos son iguales si tienen la base y altura respectivamente iguales.

Tes. ABDC=ABFE.

Dem. Suponiendo que los paralelógramos están situados sobre la misma base y al mismo lado de esta, se sigue que las bases superiores estarán en línea recta, porque de otra manera no tendrian la altura igual. Así dispuestos los paralelógramos pueden ocurrir tres posiciones como en la figura se ve, pero siempre tendremos:

$$\sphericalangle CAE=DBF \text{ (I 12)}, \; AC=BD, \; AE=BF \text{ (III 3)}$$

luego $\triangle CAE \cong DBF$ (II 7)

de donde CABF—CAE=CABF—DBE

ó ABFE=ABDC.

Cor. 1. Un paralelógramo es igual á un rectángulo que tiene igual base é igual altura.

Cor. 2. El área de un paralelógramo es igual al producto de su base por su altura (cor. 1. y teor. 1).

Teor. 7. (fig. 99). Un triángulo es la mitad de un paralelógramo que tiene igual base y altura.

Hip. AB=EH, CD=GJ, CD ⊥ AB, GJ ⊥ EH.
Tes. $\triangle ACB=\frac{1}{2}$ EFGH.

Dem. Trazando la recta CK paralela é igual á AB tendremos:

$$\triangle ACB=\tfrac{1}{2}\,ACKB \text{ (III 2)}=\tfrac{1}{2}\,EFGH \text{ (V. 6.)}$$

Cor. 1. Un triángulo es igual á un paralelógramo que tiene la altura igual, y por base la mitad del triángulo.

Cor. 2. Dos triángulos son iguales, si tienen igual base y altura.

Cor. 3. El área de un triángulo es igual á la mitad del producto de su base por su altura; lo que se sigue del Teor. 7 y Teor. 6. Cor. 2.

Teor. 8. (fig. 55). Todo trapecio es igual á un paralelógramo que tiene la misma altura, y por base la semisuma de los lados paralelos.

Dem. Juntados los puntos medios E y F de los lados no paralelos, trácese por F una paralela á AB y prolónguese hasta cortar el lado BC en G y AD en H: y será

1º ABGH un paralelógramo que tiene la misma altura que el trapecio, por estar entre las mismas paralelas, y tambien tiene por base AH=½ (AD+BC), por ser AH paralela é igual á EF ademas EF=½ (AD+BC). (III 13).

2º ABGH=ABCD por ser $\triangle CFG \cong DFH$ (II 8).

Cor. El área de un trapecio es igual al producto de la altura por la semisuma de los lados paralelos; lo que se sigue inmediatamente del teorema; ademas, descomponiendo el trapecio en dos triángulos como en la fig. 100, y siendo CF ⊥ ADy AE ⊥ BC, tendremos:

$$\triangle ACD=\tfrac{1}{2}\,AD\times CF \;\text{ y }\; \triangle CBA=\tfrac{1}{2}\,BC\times AE$$

pero AE=CF (III 3 cor.)

luego $ABCD=\triangle ACD+CBA=CF\times\frac{1}{2}(AD+BC)$.

Teor. 9. (fig. 101). Si por un punto de la diagonal de un paralelógramo se trazan dos rectas respectivamente paralelas á los lados, serán iguales los paralelógramos que no están cortados por la diagonal.

Tes. EFBJ=EHDG.

Dem. $\triangle ABC=CDA$, $\triangle AFE=EHA$, $\triangle EJC=CGE$ (III 2)

luego $\triangle ABC-(AFE+EJC)=CDA-(EHA+CGE)$

ó EFBJ=EHDG.

Teor. 10. (fig. 102). En todo ángulo con lados limitados son iguales los rectángulos formados por un lado y la proyeccion del otro lado sobre él.

Hip. BE la proyeccion de BC y BD la de BA, ademas BF=BC y BH=BA.
Tes. Retg. BJ=BG.

Dem. Uniendo C y H ademas A y F será:
$\triangle ABF \cong HBC$ (II 7) por ser $\sphericalangle ABF=R+ABC=HBC$,
pero $\triangle ABF=\frac{1}{2}$ Retg BG y $\triangle HBC=\frac{1}{2}$ Retg. BJ (V. 7)
luego Retg. BG=Retg. BJ.

Teor. 11. [de Pitágoras] (fig. 103). En todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual á la suma de los cuadrados de los catetos.

Hip. $\sphericalangle ACB=R$.
Tes. $AB^2=AC^2+BC^2$.

Dem. 1ª (fig. 103a). Trazando CL ⊥ AB y prolongando hasta K, será AL la proyeccion de AC sobre BA, BL la de BC sobre AB, AC la de AB sobre AC y BC la de BA sobre BC, de donde se sigue segun el teor. 10:

$$AC^2 = \text{Rctg. } AK, \quad BC^2 = \text{Rctg. } BK$$

luego $AC^2 + BC^2 = \text{Rctg. } AK + BK = AB^2$.

Dem. 2ª Trazando en la misma figura AG, BH, CD, CE será

$$\triangle HAB \cong CAD \text{ y } \triangle GBA \cong CBE \text{ (II. 7).}$$

ademas sabemos:

$$\triangle HAB = \tfrac{1}{2} AC^2 \text{ y } \triangle GBA = \tfrac{1}{2} BC^2 \text{ (V 7)}$$

$$\triangle CAD = \tfrac{1}{2} \text{Rctg. } AK \text{ y } \triangle CBE = \tfrac{1}{2} \text{Rctg. } BK$$

luego $AC^2 + BC^2 = \text{Rctg. } AK + BK = AB^2$.

Dem. 3ª (fig. 103b) $\sphericalangle ACB = R$ y decimos $c^2 = a^2 + b^2$.

Formados los cuadrados sobre los catetos, prolónguese DE y FG hasta cortarse en H, y DA y FB hasta cortarse en J, y será DF el cuadrado sobre $(a+b)$.

Ademas trácense AK y BL perpendicular á AB; de donde:

$$\triangle ADK \cong BJK \cong LFB \text{ (II 8) por ser } \sphericalangle \beta = \beta' \text{ y } \alpha = \alpha'$$

luego $AK = AB = BL$, y por tanto será AL un □, cuyo lado $= c$

ademas $\triangle KHL \cong BJA$ (II 8) por ser $\sphericalangle \alpha' = \alpha''$ y $\beta' = \beta''$.

Esto supuesto tenemos:

$DJ^2 = a^2 + 2 . a \times b + b^2$ (V 3)

ademas $DJ^2 = c^2 + 4 \triangle AJB = c^2 + 4 . \tfrac{1}{2} a \times b = c^2 + 2 . a \times b$

luego $a^2 + b^2 = c^2$.

Cor. 1. (fig. 104). En un triángulo cualquiera el cuadrado de un lado opuesto á un ángulo agudo es igual á la suma de los cuadrados del segundo y tercer lado, ménos el duplo del rectángulo, formado por el segundo lado y la proyeccion del tercero sobre él.

Decimos, si $\sphericalangle B < R$, será $AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2 . BC \times BD$.

Dem. $AC^2 = AD^2 + DC^2$, donde $DC = DB - BC$

luego $AC^2 = AD^2 + DB^2 + BC^2 - 2DB \times BC$ (V. 4)

ó $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 . BC \times DB$.

Cor. 2. (fig. 104.) En un triángulo obtusángulo el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso es igual á la suma de los cuadrados del segundo y tercer lado, mas el duplo del rectángulo

formado por el segundo lado y la proyeccion del tercero sobre él.

Decimos, si $\sphericalangle ACB > R$, será: $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 . BC \times DC$

Dem. $AB^2 = AD^2 + DB^2$, $DB = DC + BC$

luego $AB^2 = AD^2 + DC^2 + BC^2 + 2 . DC \times BC$

ó $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 . BC \times DC$.

Cor. 3. Siendo en la fig. 105 $\sphericalangle ACB = R$ y $h = CD$ que es perpendicular á AB tendremos:

1º $a^2 = c^2 - b^2$ y $b^2 = c^2 - a^2$ lo que es evidente.

2º $h^2 = n \times m$.

Dem. $h^2 = b^2 - n^2$, donde $b^2 = c \times n$ (V 10)

luego $h^2 = c \times n - n^2 = n \times (c - n)$ (V 2) $= n \times m$.

Cor 4. Formando otro triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea $c_,$ y los catetos $a_,$ y $b_,$ tendremos:

1º supuesto que $c = c_,$ y $a > a_,$ será $b < b_,$ puesto que $a^2 + b^2 = a_,^2 + b_,^2$.

2º supuesto que $a = a_,$ y $c > c_,$ será $b > b_,$ puesto que $c^2 - b^2 = c_,^2 - b_,^2$.

Teor. 12. (fig. 106). Si el cuadrado de un triángulo es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos lados, será recto el ángulo opuesto á dicho lado.

Hip. $BC^2 = AC^2 + AB^2$.
Tes. $\sphericalangle BAC = R$.

Dem. 1ª $\sphericalangle BAC$ no puede ser agudo por ser contra teor. 11 cor. 1 no puede ser obtuso por ser contra teor. 11 cor. 2, luego será recto.

Dem. 2ª Levantando AD ⊥ AC de modo que $AD = AB$, tendremos:

$$DC^2 = AC^2 + AD^2 = AC^2 + AB^2 \text{ (Constr.)}$$

sabemos que $BC^2 = AC^2 + AB^2$ (hip.) luego $DC = BC$

y por tanto $\triangle BAC \cong DAC$ (II 9)

luego $\sphericalangle BAC = DAC = R$.

Nota. Cor. 1 y 2 del teor. 11 valen tambien inversamente, lo que se demuestra indirectamente.

§ 23. PROBLEMAS ELEMENTALES.

Probl. 1º (fig. 107). Transformar un paralelógramo ABDC en rectángulo igual.

Constr. Levantando en A y B perpendiculares hasta cortar á CD en E y F, será ABEF el rectángulo pedido.

Dem. 1º ABEF es un rectángulo (III def. 2ª) 2º $ABEF = ABDC$ (V. 6).

Probl. 2º (fig. 108). Transformar un paralelógramo ABCD en otro igual que tenga un lado pedido (m).

Constr. Prolongado AB, de modo que $BE = m$, tracemos EC hasta que corte AD en F, ademas FG ‡ AE y EG ‡ AD, despues prolonguemos BC y DC hasta que corten á FG en J y á EG en H, y será CHGJ el paralelógramo pedido.

Dem. 1º CHGJ es un paralelógramo puesto que los lados opuestos son paralelos.
2º Tiene el lado m; porque $CH = BE = m$ (constr.)
3º $CHGJ = ABCD$ (V 9).

Probl. 3. (fig. 109). Transformar un triángulo ACB en paralelógramo igual.

Constr. Siendo D el punto medio de AB, tracemos por C la recta CN ‡ AB y por D la recta DE ‡ AC y será ACED el paralelógramo pedido.

Dem. 1º ACED es un paralelógramo (def.) 2º $ACED = \triangle ACB$ (V 7. cor. 1).

Nota. Por el probl. 2º podemos ahora transformar un triángulo en rectángulo igual que tenga un lado dado.

Probl. 4. (fig. 110). Transformar un rectángulo ABDC en un cuadrado de igual área.

Constr. Prolongando AB hasta D′ donde $BD' = BD$, describamos sobre AD′ como diámetro una semicircunferencia, y prolongando DB hasta cortar á la circunferencia en E, será BE^2 el cuadrado pedido,

Dem. $BE^2 = AB \times BD'$ (V 11. cor. 3) por ser $\sphericalangle AED' = R$ (IV 19).
luego $BE^2 = AB \times BD$ por ser $BD' = BD$ (constr.)

Nota. Luego podemos transformar todo paralelógramo ó triángulo en un cuadrado igual.

Probl. 5 (fig. 111). Transformar un trapecio CABD en triángulo igual.

Constr. Prolongado CD hasta E, de modo que $DE = AB$ juntemos E con A y será CEA el triángulo pedido.

Dem. $CABD = \frac{1}{2}(CD + AB) \times AF$ [V 8 cor.] por ser $AF \perp CD$,
ademas $\triangle CAE = \frac{1}{2}(CD + DE) \times AF = \frac{1}{2}(CD + AB) \times AF$ por ser $AB = DE$,
luego $CABD = \triangle CAE$.

Probl. 6º (fig. 112). Transformar un trapezoide ABCD en triángulo igual

Constr. Juntando B con D tracemos CM ‡ BE y prolonguemos AD hasta que corte á CM en E, y unido E con B, será AEB el triángulo pedido.

Dem. $\triangle DBE = DBC$ (V 7. cor. 2) de donde
$\triangle ABD + DBE = ABD + DBC$, es decir $\triangle ABE = ABCD$.

Nota. Todo polígono puede transformarse en otro igual, que tenga un lado ménos, y por tanto últimamente en un triángulo igual. La construccion será como en el Probl. 6.

Probl. 7. Transformar dos cuadrados en uno de igual área.

Probl. 8. Construir un cuadrado que sea igual á la diferencia de otros dos.

Nota. Los problemas 7 y 8 se resuelven por el teor. 11.

CAPITULO VI.

Proporciones en general.

§ 24. LÍMITES DE LAS CANTIDADES VARIABLES. *

1º Una cantidad se dice variable, si continuamente ó sucesivamente puede mudar su valor, y será variable dependiente si se muda segun una ley fija.

2º Se llama límite de una variable dependiente el valor

* *La teoría de los límites propiamente se trata en el análisis algebrica: aquí con el objeto de simplificar algunas demostraciones, damos una mera idea de la definicion tanto del límite como de la variable; bien entendido que se prescinde de la definicion general.*

constante, al cual se puede la variable aproximar cuanto se quiera, sin poder nunca igualarle.

Ejemplo 1° algébrico: El valor de la cantidad variable 0,3333.... [donde las cifras siguientes son iguales á las escritas] se aproxima mas y mas á $\frac{1}{3}$. de modo que la diferencia puede hacerse tan pequeña como se quiera, sin poderla igualar á 0.

Se escribe lim. $(0,333\ldots.)=\frac{1}{3}$.

Ejemplo 2° geométrico (fig. 113). Siendo ABCDE un polígono inscripto en un círculo, y formando otro AFBGC &a, con duplo número de lados, de modo que arc. AF=FB, arc. BG=GC &a. tendremos un polígono cuya área irá aproximándose al círculo; procediendo indefinidamente veremos que el área del polígono variable se aproxima al círculo cuanto se quiera, sin poderle nunca igualar.

3° Si dos variables dependientes permanecen siempre iguales aproximándose á sus límites, tambien estos serán iguales.

Dem. Siendo X é Y las variables, y lim X=A, lim Y=B, será si X é Y se acercan al límite creciendo:

$X+\alpha=A$, donde α mas y mas se aproxima á 0, creciendo X
y $Y+\beta=B$, ... β........................... á 0, creciendo Y
de donde se saca:

$$X=A-\alpha \text{ é } Y=B-\beta$$

luego $A-\alpha=B-\beta$ por ser siempre X=Y
ó $A-B=\alpha-\beta$.

Si X é Y se aproximan al límite decreciendo, tendremos:

$$A-B=\beta-\alpha.$$

Suponiendo que A no sea igual á B tendremos las siguientes conclusiones:

1ª La diferencia entre A y B es la misma que entre α y β.

2ª La diferencia entre A y B es una cantidad determinada, por serlo A y B; luego será tambien la diferencia entre α y β una cantidad determinada y constante.

3ª La diferencia entre α y β puede hacerse menor que toda cantidad determinada, puesto que α y β se aproximan mas y mas á 0, y por tanto lo hará tambien su diferencia, luego no será una cantidad determinada ni igual á la diferencia que hay entre A y B, pues es menor.

Luego tenemos una contradiccion entre la 2ª y 3ª conclusion, y por tanto no podemos suponer que A sea desigual á B, luego A=B ó lim X=lim Y.

§ 25. RAZONES.

1° Vamos á tratar las proporciones geométricas en general, estableciendo definiciones, teoremas y demostraciones que no so-

lo sirvan para los números sino tambien para todas las demas cantidades, cualesquiera que sean.

2° Proporcion geométrica es la igualdad de dos razones. La razon se escribe A:B ó tambien $\frac{A}{B}$, donde A y B son números abstractos ó cantidades concretas: siendo concretas será menester que sean homogéneas, por ejemplo, líneas, áreas ó cuerpos; porque segun la razon A:B siempre preguntamos ¿cuántas veces está contenido B en A?, pero siendo A un área y B una recta, es un absurdo preguntar: cuantas veces la recta B esté contenida en el área A.

3° El número abstracto que indica cuántas veces está B contenido en A, se llama cuociente, ó segun los modernos el esponente de la razon. De donde se sigue, que dos razones son iguales si sus cuocientes lo son, por ejemplo, A:B=e y C:D=e y por eso podemos escribir:

$$A:B=C:D, \text{ lo que se pronuncia:}$$

A es á B como C á D. En este sentido se llama dicha igualdad proporcion geométrica.

4° En la proporcion A:B=C:D son A y C los antecedentes, B y D los consecuentes, ademas B y C son los términos medios, A y D los estremos. Si los términos medios son iguales, tendremos una proporcion continua, y el término medio se llama media proporcional, por ejemplo, A:B=B:C.

5° Teniendo una serie de razones, cuyos términos son de la misma especie:

$$A:B=A':B'=A'':B''=A''':B'''$$

se escribe tambien

$$A:A':A'':A'''=B:B':B'':B'''$$

6° Cuatro cantidades concretas que forman una proporcion, pueden ser directa ó indirectamente proporcionales: son directamente proporcionales, si el órden de los términos en la segunda razon corresponde al observado en la primera; pero son inversamente proporcionales si el órden está invertido.

7° Hemos dicho arriba que las rectas pueden ser incomensurables; en efecto, la hipotenusa c de un triángulo rectángulo cuyos catetos a y b son iguales, es incomensurable con ellos, puesto que:

$$c^2=2a^2 \text{ ó } c=a\sqrt{2}$$

Casos de semejanza son infinitos tanto de las líneas como de las otras cantidades.

Ahora veamos si comparando entre sí esta clase de cantidades, dan una proporcion.

8° Siendo A y B dos cantidades homogéneas é incomensurables, tomemos la una parte de B, que esté contenida en A, de modo que: $s.\frac{1}{n}B<A$ y $(s+1)\frac{1}{n}B>A$, donde a) n y s serán números enteros.

b) n puede tomarse tan grande como se quiera.

c) s será dependiente de n, es decir, cuanto mas grande se tome n, mas grande será s.

d) aumentando n el valor de $s.\frac{1}{n}B$ se aproxima mas y mas al valor exacto de A, porque la diferencia que hay entre A y $s.\frac{1}{n}B$ será siempre menor que $\frac{1}{n}B$, puesto que tenemos siempre $(s+1)\frac{1}{n}B>A$.

Nota. $\frac{s}{n}$ y $\frac{s+1}{n}$ se llaman los cuocientes aproximados de la razon, A:B.

9º Siendo C y D otras dos cantidades incomensurables entre sí, supongamos que podamos escribir:

$$s.\frac{1}{n}D<C \text{ y } (s+1).\frac{1}{n}D>C$$

donde tengan s y n el mismo valor y el mismo sentidocomo en (8).

En este supuesto se dice que las dos razones A:B y C:D tienen siempre el mismo valor y el mismo sentido aproximado.

10º Corolario de los números 7 hasta 9.

Cor. 1. El límite de $\frac{n}{s}$ es precisamente el cuociente de la razon A:B puesto que el límite de $s.\frac{1}{n}B$ es A (8, d.)

Cor. 2. El cuociente de A:B tiene un valor fijo y determinado, por ser cantidades fijas y determinadas A y B.

Cor. 3. El cuociente de la razon A:B no puede tener sino un solo valor determinado.

Dem. Cualquiera que sea el valor de A:B, siempre estará contenido entre $\frac{1}{n}$ y $\frac{s+1}{n}$; y aumentando n, la diferencia entre $\frac{s}{n}$ y $\frac{s+1}{n}$ puede hacerse menor que toda cantidad asignable, luego entre $\frac{s}{n}$ y $\frac{s+1}{n}$ no pueden ser dos valores fijos y distintos sino uno solo que es el límite de $\frac{s}{n}$ ó de $\frac{s+1}{n}$.

Cor. 4. El cuociente de la razon A:B, ciertamente no puede espresarse por un número, sea entero, sea fraccionario; pero por eso no es permitido decir que sea indeterminado en sí mismo, puesto que segun cor. 3, dos valores distintos del cuociente no pueden satisfacer á la razon A:B.

Nota. Lo mismo tiene lugar en los números irracionales, por ej. $\sqrt{2}$; y por esta analogía se llaman dichos cuocientes ó razones irracionales, aunque no puedan siempre espresarse por **números irracionales.**

§ 26. TEOREMAS SOBRE LAS PROPORCIONES EN GENERAL.

Teor. 1. Dos razones de cantidades incomensurables A:B y C:D, que tienen siempre el mismo cuociente aproximado, forman una verdadera proporcion.

Hip. $\frac{s}{n}.B<A$ y $\frac{s+1}{n}.B>A$

$\frac{s}{n}D<C$ y $\frac{s+1}{n}.D>C$

Tes. A:B=C:D.

Dem. 1ª lim. $\frac{s}{n}=(A:B)$ y lim. $\frac{s}{n}=(C:D)$ (10 cor. 1)

luego A:B=C:D (§ 24 3º)

Dem. 2ª $\frac{s+1}{n}>(A:B)>\frac{s}{n}$

$\frac{s}{n}<(C:D)<\frac{s+1}{n}$ restando tendremos:

$$\frac{s+1}{n}-\frac{s}{n}>(A:B)-(C:D)>\frac{s}{n}-\frac{s+1}{n}$$

ó $\frac{1}{n}>(A:B)-(C:D)>-\frac{1}{n}$

Sabemos que el límite de $\frac{1}{n}$ es igual á 0 (hip.) luego la diferencia de las dos razones A:B y C:D está entre +0 y —0, es decir igual á 0.

luego A:B=C:D.

Nota 1ª La segunda demostracion se puede siempre aplicar; pero generalmente es mas complicada que la fundada en el teoremas de los límites.

Nota 2ª Para mayor brevedad usaremos en los siguientes teoremas solo letras, donde la letra e ó las otras minúsculas denotan el cuociente en la razon dada. Por ej. A:B=e dice: el cuociente de la razon A:B es e.

Nota 3ª Para mayor claridad repetiremos el principio del § 25 nº 3º: dos razones forman una proporcion, si sus cuocientes respectivos son iguales.

Teor. 2. Si A:B=C:D y $A \gtreqless B$ será tambien

$C \gtreqless D$

Dem. Por ser A=eB y C=eD,

será solamente $A \gtreqless B$ bajo la condicion $e \gtreqless 1$

y si $e \gtreqless 1$ será siempre $C \gtreqless D$

luego si $A \gtreqless B$ será $C \gtreqless D$.

Teor. 3. Si $A:B=C:D$ y m un número cualquiera,

serán:
1° $mA:mB=C:D$
2° $A:B=mC:mD$
3° $mA:B=mC:D$
4° $A:mB=C:mD$.

Dem. para el caso 1°. Siendo $A:B=e$ será $A=eB$
luego $mA=m.eB$
" $mA:mB=e$; pero tambien $C:D=e$ (hip).
" $mA:mB=C:D$.

Dem. para el caso 2° Se forma de la misma manera como la del 1°

Dem. para el caso 3°

$$A=eB \qquad C=eD$$
luego $mA=meB \qquad mC=meD$
" $mA:B=me \qquad mC:D=me$

y por tanto $mA:B=mC:D$.

Dem. para el caso 4°

$$A=eB \quad \text{y} \quad C=eD$$
luego $A=\frac{e}{m}.mB$ " $C=\frac{e}{m}mD$
" $A:mB=\frac{e}{m}$ " $C:mD=\frac{e}{m}$

y por tanto $A:mB=C:mD$.

Cor. Poniendo $m=\frac{1}{n}$ tendremos lo mismo relativamente á la division.

Teor. 4. Si $A:B=C:D$

será 1° $B:A=D:C$ y si todos los términos son homogéneos ademas 2° $A:C=B:D$
y 3° $C:A=D:B$.

Dem. para el caso 1°

$$A=eB \quad \text{y} \quad C=eD$$
luego $B=\frac{1}{e}A$ " $D=\frac{1}{e}C$
" $B:A=\frac{1}{e}$ " $D:C=\frac{1}{e}$

y por tanto $B:A=D:C$.

Dem. para el caso 2° Por ser:

$A:eD=A:eD$ será $A:eD=\frac{1}{e}A:D$ (teor. 3 cor.)

ademas $eD=C$ y $A=eB$; ó $B=\frac{1}{e}A$ (hip.)

luego poniendo en la proporcion

$$A:eD=\frac{1}{e}A:D$$

C en lugar de eD y B en lugar de $\frac{1}{e}A$ tendremos

$$A:C=B:D,$$

Dem. para el caso 3° Se sigue inmediatamente del caso 1°

Cor. Si en la proporcion $A:B=C:D$ en donde todas las cantidades son homogéneas es $A \gtreqless C$, será tambien $B \gtreqless D$ (teor. 2.)

Teor. 5. Si $A:B=C:D$

serán: 1° $A:A \pm B=C:C \pm D$
2° $A+B:A-B=C+D:C-D$ y si todos los términos son homogéneos
ademas 3° $A:A \pm C=B:B \pm D$.

Dem. para el caso 1°

$$A=eB \quad \text{y} \quad C=eD$$
luego $A \pm B=(e \pm 1)B$ " $C \pm D=(e \pm 1)D$
" $A:A \pm B=eB:(e \pm 1)B$, " $C:C \pm D=eD:(e \pm 1)D$
" $A:A \pm B=\frac{e}{e \pm 1}$ " $C:C \pm D=\frac{e}{e \pm 1}$

y por tanto $A:A \pm B=C:C \pm D$.

Dem. para el caso 2°

$$A+B=(e+1)B \quad \text{y} \quad C+D=(e+1)D$$
$$A-B=(e-1)B \quad " \quad C-D=(e-1)D$$

luego $A+B:A-B=\frac{e+1}{e-1}$ y $C+D:C-D=\frac{e+1}{e-1}$

y por tanto $A+B:A-B=C+D:C-D$.

Dem. para el caso 3° tendremos

$A:C=B:D$ (hip. y teor. 4 caso 2°)
luego $A:A \pm C=B:B \pm D$ (caso 1°)

Cor. Otras transformaciones se pueden tener por el teor 4°

Teor. 6. Si A:B=C:D=E:F=G:H y todos los términos son homogéneos, será:

$$A \pm C \pm E \pm G : B \pm D \pm F \pm H = A : B = C : D \ \&a.$$

Dem. $A = eB,\ C = eD,\ E = eF,\ G = eH$

luego $A \pm C \pm E \pm G = e(B \pm D \pm F \pm H)$

" $A \pm C \pm E \pm G : B \pm D \pm F \pm H = e = A : B$

de donde se saca

$$A \pm C \pm E \pm G : B \pm D \pm F \pm H = A : B = C : D \ \&a.$$

Teor. 7. Si $A:B=C:D$

y $A:E=C:F$

será $A:B \pm E = C:D \pm F.$

Dem. $A = eB$ ó $B = \frac{1}{e}A$ y $C = eD$ ó $D = \frac{1}{e}C$

ademas $A = e'E$ ó $E = \frac{1}{e'}A$ " $C = e'F$ ó $F = \frac{1}{e'}C$

luego $B \pm E = \left(\frac{1}{e} \pm \frac{1}{e'}\right)A$ " $D \pm F = \left(\frac{1}{e} \pm \frac{1}{e'}\right)C$

" $B \pm E : A = \frac{1}{e} \pm \frac{1}{e'}$ " $D \pm F : C = \frac{1}{e} \pm \frac{1}{e'}$

De donde se saca:

$$B \pm E : A = D \pm F : C$$

ó $A : B \pm E = C : D \pm F.$

Teor. 8. Si $A:B=C:D$

y $A:E=C:F$

será $B:E=D:F$

Dem. $B = \frac{1}{e}A$ y $E = \frac{1}{e'}A$ y $D = \frac{1}{e}C$ y $F = \frac{1}{e'}C$

luego $B:E = \frac{1}{e}A : \frac{1}{e'}A$ " $D:F = \frac{1}{e}C : \frac{1}{e'}C$

" $B:E = \frac{e'}{e}$ " $D:F = \frac{e'}{e}$

" $B:E = D:F.$

Teor. 9. Si $A:B=C:D$

y $A:E=F:D$

será $B:E=F:C.$

Dem. $B = \frac{1}{e}A$ y $E = \frac{1}{e'}A$ y $C = eD$ y $F = e'D$

luego $B:E = \frac{e'}{e}$ y $F:C = \frac{e'}{e}$

$$B:E = F:C.$$

CAPITULO VII.

Proporciones entre cantidades geométricas y semejanza de figuras.

§ 27. RECTAS PROPORCIONALES.

Teor. 1. (fig. 114 y 115). Toda recta paralela á un lado de un triángulo divide á los otros dos en partes proporcionales.

Hip. DE ‡ AC.
Tes. BD:DA=BE:EC.

Dem. Caso 1º (fig. 114). Siendo BD y DA *comensurables* supongamos que BM sea la medida comun entre ellas. Colocando BM como medida sobre BD y DA, supongamos que BM esté contenida en BD m (4) veces y en DA n (3) veces. Dirigiendo por los puntos de division paralelas á AC, será BM′=M′N′=N′P′ &a. (III. 15 cor. 2); luego BM′ estará contenida en BE m (4) veces y en EC n (3) veces, á saber:

$BD = m.BM$ y $BE = m.BM'$

$DA = n.BM$ " $EC = n.BM'$

luego $BD:DA = \frac{m}{n} = \left(\frac{4}{3}\right)$ " $BE:EC = \frac{m}{n} = \left(\frac{4}{3}\right)$

de donde $BD:DA = BE:EC.$

Caso 2º (fig. 115) BD y DA *incomensurables.*

1º Estando BD dividida en partes iguales tan pequeñas como se quiera, pongamos una de estas partes como medida sobre DA y no podrá el último punto N de la division coincidir con A, por ser incomensurables BD y DA; trazando NN′ ‡ AC, será BD:DN=BE:EN′ (caso 1º)

2º Podemos hacer que el punto N se aproxime mas y mas al punto A, tomando las partes iguales de BD sucesivamente mas pequeñas y por eso el límite de DN será DA, ó bien el límite de la razon $(BD:DN)$ será la $(BD:DA)$; por consiguiente tambien N′ se aproximará mas y mas al punto C, y el límite de EN′ será EN ó bien el límite de la razon $(BE:EN')$ será la $(BE:EC)$

Ademas sabemos que siempre tiene lugar la proporcion:

$BD:DN=BE:EN'$ por ser siempre $NN' \ddagger AC$.

De donde tenemos:

lim. $(BD:DN)=BD:DA$ y lim. $(BE:EN')=BE:EC$

ademas siempre $BD:DN=BE:EN'$

luego $BD:DA=BE:EC$ (§ 24. 3)

Cor. 1. $BD+DA:BD=BE+EC:BE$ (VI. 7)

ó $AB:BD=CB:BE$

ó $AB:CB=DB:EB$.

Cor. 2 (fig. 116). Si tres paralelas cortan á otras dos rectas cualesquiera, las cortan formando segmentos proporcionales.

La demostracion puede reducirse al teorema demostrado.

Siendo $B''B' \ddagger DE \ddagger AC$ y $B''C'' \ddagger BC \ddagger B'C'$ será

$B'E'=BE=B''E''$ y $E'C'=EC=E''C''$ (III. 3.)

luego $B'E':BD=E'C':DA$

ó bien $B''E'':BD=E''C'':DA$.

Cor. 3. Lo que vale para tres paralelas, valdrá para muchas.

Teor. 2. (fig. 117). Si una recta divide á dos lados de un triángulo en partes directamente proporcionales á estos, será paralela al tercer lado.

Hip. $BA:BC=BD:BE$.
Tes. $DE \ddagger AC$.

Dem. La paralela por D á AC corte B E en un punto X,

luego $BA:BC=BD:BX$ (VII. 1 cor. 1)

ademas $BA:BC=BD:BE$ (hip.)

luego $BX=BE$ ó el punto X es el punto E

y por tanto $DE \ddagger AC$.

Cor. Lo mismo se verifica si los segmentos son entre sí directamente proporcionales, puesto que

$AD:DB=CE:EB$

será $AD+DB:DB=CE+EB:EB$

luego $AB:DB=CB:EB$

de donde $DE \ddagger AC$.

Teor. 3. (fig. 117). Si en un triángulo se traza una recta paralela á un lado, los otros dos son proporcionales á los segmentos superiores correspondientes como el tercer lado á la recta paralela.

Hip. $DE \ddagger AC$
Tes. $AB:DB=AC:DE$ $(=CB:EB)$.

Dem. Tracemos por D una recta $DF \ddagger BC$ y tendremos:

$AB:DB=AC:FC$ (VII. 1 cor. 1) donde $FC=DE$ (III 3)

luego $AB:DB=AC:DE$ ó $AB:AC=DB:DE$.

Teor. 4. (fig. 118). Si en un triángulo se traza una paralela á un lado y desde el vértice opuesto á dicho lado una ó mas rectas, el lado y su paralela quedan divididos en partes proporcionales.

Hip. $DE \ddagger AC$.
Tes. $AH:HC=DF:FE$.

Dem. $AH:DF=HB:FB=HC:FE$ (VII. 3)

luego $AH:DF=HC:FE$, ó bien: $AH:HC=DF:FE$.

Si se trazan mas rectas, la demostracion será análoga.

Cor. (fig. 125) Tres rectas se encontrarán en un mismo punto, si cortan á dos paralelas, de modo que los segmentos de estas sean entre sí directamente proporcionales.

Supuesto que $AC \ddagger DE$ y $AH:HC=DF:FE$ y que ademas AD y FH se corten en un punto B, decimos tambien que CE pasará por el punto B Para demostrarlo, júntese B con C, y la recta DF se halla cortada en un punto X, de donde: $AH:HC=DF:FX$ (ter.), luego: $FE=FX$, es decir: el punto X es el punto E ó la recta BC pasará por E, luego la recta CE pasará por B.

Nota. Supuesto que dos de estas tres rectas sean paralelas entre sí, lo será tambien la tercera.

Teor. 5 (fig. 119). En toda proporcion entre rectas el rectángulo formado por los términos medios es igual al formado por los estremos.

Hip. $a:b=c:d$.
Tes. $a \times d=b \times c$.

Dem. En los lados de un ángulo recto E formemos: $EA=a$, $EB=b$, $EC=c$, $ED=d$, ademas tiremos DC, AB, AD y CB y será:

$CD \ddagger AB$ por ser $AE:BE=CE:DE$ (hip.)

luego $\triangle ABD=ABC$ (V. 7 cor. 2)

de donde $\triangle DFB=AFC$

luego $\triangle DFB + DFCE = AFC + DFCE$
ó $\triangle EBC = EDA$
pero $\triangle EBC = \frac{1}{2} EC \times EB = \frac{1}{2} c \times b$
y $\triangle EDA = \frac{1}{2} EA \times AD = \frac{1}{2} a \times d$
luego $a \times d = c \times b.$

Teor. 6. Los lados de dos rectángulos iguales son inversamente proporcionales.

Hip. $a \times b = c \times d.$
Tes. $a : c = d : b.$

Dem. Siendo $a : c = d : x$ será $a \times x = c \times d$, y segun la hipótesis $c \times d = a \times b$, luego $a \times b = a \times x$, es decir: el rectángulo formado de a y b es igual al formado de a y x, luego $b = x$; y por tanto $a : c = d : b$.

§ 28. TRIÁNGULOS SEMEJANTES.

Explicaciones.

1ª La semejanza de las figuras solo consiste en la conformidad de la forma; y por tanto haciendo abstraccion de la magnitud atiende solamente á lo que determina la forma.

En los polígonos los ángulos y la relacion que hay entre los lados respectivos determinan la forma. De donde se sigue que para ser los polígonos semejantes, será menester:

1º que tengan los ángulos iguales y colocados en el mismo órden. Los vértices de los ángulos iguales se llaman homólogos, y lados homólogos los que unen vértices homólogos.

2º que los lados homólogos estén en uno y en otro en la misma relacion, es decir, que sean proporcionales.

De donde la definicion:

2ª Dos polígonos son semejantes si tienen los ángulos respectivamente iguales y colocados en el mismo órden y ademas los lados homólogos proporcionales.

3ª Especialmente dos triángulos son semejantes, si tienen todos los ángulos iguales y proporcionales los lados homólogos, que se oponen á ángulos iguales.

Teor 7. (fig. 117). Si en un triángulo se tira una paralela á un lado, el triángulo parcial que resulta, será semejante al total.

Hip. $DE \parallel AC.$
Tes. $\triangle DBE \sim ABC.$

Dem. $\sphericalangle B = B$, $\sphericalangle A = BDE$, $\sphericalangle C = BED$ por ser $DE \parallel AC$.
ademas $AB : CB = DB : EB$ (VII. 1 cor. 1)

y $AB : AC = DB : DE$ (VII. 3)
ó escribiendo de otra manera
$AB : BC : CA = DB : BE : ED.$

Teor. 8. (fig. 120). Dos triángulos son semejantes, si tienen los ángulos respectivamente iguales.

Hip. $\sphericalangle A = A'$, $\sphericalangle B = B'$, $\sphericalangle C = C'$.
Tes. $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Dem. Haciendo $BA'' = B'A'$ trácese $A''C'' \parallel AC$ y será:

$\triangle A''BC'' \cong A'B'C'$ (II. 8)
pero $\triangle A''BC'' \sim ABC$ (VII. 7)
luego $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Teor. 9. (fig. 120). Dos triángulos son semejantes si tienen respectivamente proporcionales dos lados é igual el ángulo comprendido.

Hip. $AB : BC = A'B' : B'C'$ y $B = B'$
Tes. $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Dem. Haciendo $BA'' = B'A'$ y $BC'' = B'C'$ será

$\triangle A''BC'' \cong A'B'C'$ (II. 7)

luego $AB : BC = A''B : BC''$ por ser $A''B = A'B'$ y $BC'' = B'C'$
" $A''C'' \parallel AC$ (VII. 2)
" $\triangle ABC \sim A''BC''$ (VII. 7)
" $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Teor. 10. (fig. 120). Dos triángulos son semejantes si tienen respectivamente sus tres lados proporcionales.

Hip. $AB : BC : CA = A'B' : B'C' : C'A'$.
Tes. $\triangle ABC \sim A'B'C'$.

Dem Haciendo $BA'' = B'A'$ y $BC'' = B'C'$ será:
$AB : BC = A''B : BC''$ (hip.) luego: $A''C'' \parallel AC$ (VII 2)
luego $\triangle A''BC'' \sim ABC$
de donde $AB : AC = A''B : A''C''$
ademas es $AB : AC = A'B' : A'C'$,
luego $A''C'' = A'C'$ por ser $A''B = A'B'$ (const.)
y por tanto $\triangle A''BC'' \cong A'B'C'$ (II. 9);
ya sabemos que $\triangle A''BC'' \sim ABC$, luego $ABC \sim A'B'C'$.

Teor. 11. (fig. 120). Dos triángulos son semejantes, si tienen respectivamente dos lados proporcionales é igual el ángulo opuesto al mayor de ellos.

Hip. $AB:BC=A'B':B'C'$, $\sphericalangle C=C'$, $AB>BC$ y $A'B'>B'C'$
Tes. $\triangle ABC\sim A'B'C'$

Dem Haciendo $BA''=B'A'$ y $BC''=B'C'$ será

$BA'':BC''=BA:BC$ (hip. y const.) luego $A''C''\mp AC$ (VII. 2)
luego $\triangle A''BC''\sim ABC$ de donde $\sphericalangle BC''A''=C=C'$
" $\triangle A''BC''\cong A'B'C'$ (II. 10)
" $\triangle ABC\sim A'B'C'$

Cor. Dos triángulos rectángulos son semejantes, si tienen proporcionales la hipotenusa y un cateto.

§ 29. CONSECUENCIAS RELATIVAMENTE AL TRIÁNGULO.

Teor. 12. (fig. 121). La bisectriz de un ángulo en un triángulo divide al lado opuesto en partes proporcionales á los lados adyacentes.

Hip. $\sphericalangle ABD=DBC$.
Tes. $AD:DC=AB:BC$

Dem. Trazando por A una paralela á BC, y prolongando BD hasta que corte á ésta en E, tendremos:

$\sphericalangle DAE=DCB$ y $\sphericalangle DEA=DBC$ (I. 10)
luego $\triangle ADE\sim CDB$, y por tanto $AE:AD=CB:CD$
además es $\sphericalangle DEA=DBC=DBA$ ó bien $\triangle BAE$ isósele
de donde $AE=AB$, luego será la proporcion precedente:

$AB:AD=CB:CD$
ó bien $AB:CB=AD:CD$.

Teor. 13. (fig. 121) Si una recta trazada desde el vértice de un triángulo divide al lado opuesto en partes proporcionales á los lados adyacentes, será bisectriz de dicho ángulo.

Hip. $AD:DC=AB:CB$.
Tes. $\sphericalangle ABD=CBD$.

Dem. Corte la bisectriz de $\sphericalangle B$ el lado AC en X y será:

$AB:BC=AX:XC$ luego $AD:DC=AX:XC$

y por consiguiente $AD+DC:AD=AX+XC:AX$
ó bien $AC:AD=AC:AX$ es decir $AD=AX$,
luego el punto X será el punto D y por tanto BD es la bisectriz del $\sphericalangle B$.

Teor. 14. (fig. 122) Si en un triángulo rectángulo se baja la altura sobre la hipotenusa:

1° la altura es media proporcional entre los segmentos de la hipotenusa;

2° Cada cateto es media proporcional entre toda la hipotenusa y su segmento adyacente.

Hip $\sphericalangle ABC=R$. $BD\perp AC$.
Tes. 1° $AD:BD=BD:DC$, 2° $AC:AB=AB:AD$

Dem. Por ser $\alpha=\alpha'$ y $\gamma=\gamma'$ será:
$\triangle ADB\sim BDC\sim ABC$ (VII. 8)
luego 1° $AD:BD=BD:DC$, 2° $AC:AB=AB:AD$
y $AC:BC=BC:CD$.

Cor. 1. $BD^2=AD\times DC$, $AB^2=AC\times AD$, $BC^2=AC\times CD$

Cor. 2 $AB^2+BC^2=AC\times AD+AC\times CD$
ó $AB^2+BC^2=AC(AD+DC)=AC^2$.

Cor. 3. Si $BD^2=AD\times DC$ será $\sphericalangle ABC=R$.

Dem. Describiendo sobre AC como diámetro una semicircunferencia que corte BD en X, será $\sphericalangle AXC=R$ (IV. 19)
luego $DX^2=AD\times DC=DB^2$ ó $DX=DB$, es decir el punto X será precisamente el punto B, y por tanto $\sphericalangle ABC=R$.

§ 30. CONSECUENCIAS RELATIVAMENTE AL CÍRCULO.

Teor. 15. (fig. 123). Si dos cuerdas se cortan, sus partes son inversamente proporcionales.

Tes. $EA:ED=EC:EB$.

Dem. Trazados AD y BC serán: $\sphericalangle B=D$ y $\sphericalangle C=A$ (IV 18 cor.) luego $\triangle AED\sim CEB$, luego $EA:ED=EC:EB$.

Cor El rectángulo formado por las partes de una cuerda, es igual al formado por las de la otra; es decir, $ED\times EC=EA\times EB$.

Teor. 16. (fig. 124) Dos secantes que se cortan en un punto fuera de un círculo son inversamente proporcionales á sus partes externas.

Tes. $BA:BC=BE:BD$.

Dem. Trazados AE y CD será
$\sphericalangle A=C$ luego $\triangle ABE\sim CBD$
luego $BA:BC=BE:BD$.

Cor. El rectángulo formado por una secante y su parte externa es igual al formado por otra que parte del mismo punto, y su parte externa; es decir, $BA \times BD = BC \times BE$.

Teor. 17 (fig. 125). Si se trazan desde un mismo punto una tangente y una secante á una circunferencia, será la tangente media proporcional entre la secante entera y su parte externa.

Tes. $BC:BA = BA:BD$.

Dem. Trazado AD será:

$\sphericalangle C = BAD$ (IV. 21), y por tanto $\triangle CAB \sim ADB$

luego $BC:BA = BA:BD$.

Cor. El cuadrado de una tangente es igual al rectángulo formado por una secante, que parte del mismo punto, y su parte externa; es decir $BA^2 = BC \times BD$.

Teor. 18. (fig. 126). El rectángulo formado por dos lados de un triángulo es igual al rectángulo formado por el diámetro del círculo circunscrito y la altura bajada al tercer lado.

Hip. $BD \perp AC$, BE es el diámetro.

Tes. $AB \times BC = BD \times BE$

Dem. Juntando A con E será $\sphericalangle EAB = R = BDC$

además $\sphericalangle BEA = BCD$ (IV. 18 cor.) luego $\triangle BEA \sim BCD$

y por tanto $AB:BE = BD:BC$ ó bien $AB \times BC = BD \times BE$.

Teor. 19. (fig. 127) (de Ptolemeo). En todo cuadrilátero inscripto en un círculo, la suma de los rectángulos formados por los lados opuestos es igual al rectángulo formado por las diagonales.

Tes. $AB \times DC + AD \times BC = AC \times BD$.

Dem. Formado $\sphericalangle CBE = DBA$ y por ser $\sphericalangle BCE = BDA$, será

$\triangle BCE \sim BDA$ de donde se saca:

$BC:CE = BD:DA$ ó bien $BC \times DA = BD \times CE$.

Además $\sphericalangle ABD + DBE = CBE + DBE$, por ser $ABD = CBE$,

ó $\sphericalangle ABE = DBC$ y $\sphericalangle EAB = BDC$ (IV. 18 cor.)

de donde $\triangle ABE \sim DBC$ luego $AB:AE = BD:DC$

o bien $AB \times DC = BD \times AE$

ya sabemos que $BC \times AD = BD \times CE$. y $AE + CE = AC$.

luego $AB \times DC + BC \times AD = BD \times (AE + CE) = BD \times AC$.

§ 31. POLÍGONOS SEMEJANTES.

Teor. 20. (fig. 128). Si desde un punto interior O de un polígono ABCDE se trazan rectas á sus vértices, y entre cada dos de estas trazamos: $A'B' \ddagger AB$, $B'C' \ddagger BC$, $C'D' \ddagger CD$ y $D'E' \ddagger DE$; uniendo ahora E' con A' resultará un nuevo polígono $A'B'C'D'E'$ semejante al dado.

Dem. 1º Todos los triángulos parciales son semejantes á los totales. Pues de los triángulos AOB, BOC &a. y sus parciales, está ya probado por el teor 7; solo resta probar que:

$$\triangle AOE \sim A'OE'$$

Sabemos que:

$AO:A'O = BO:B'O = CO:C'O = DO:D'O = EO:E'O$

ó $AO:A'O = EO:E'O$

luego $A'E' \ddagger AE$ (VII. 2) y por tanto $\triangle AOE \sim A'OE'$.

2º $\sphericalangle A = A'$, $B = B'$ &a. (I. 12).

3º Los lados de ABCDE son proporcionales á los homólogos de $A'B'C'D'E'$.

Pues $AB:A'B' = BO:B'O = BC:B'C' = CO:C'O$ &a. (nº 1º)

ó $AB:A'B' = BC:B'C' = CD:C'D'$ &a.

El nº 2º y 3º verifican las condiciones para ser ABCDE semejante á $A'B'C'D'E'$.

Cor. Lo mismo se puede demostrar tomando el punto O fuera del perímetro de ABCDE ó en él.

Teor. 21. (fig. 129). Los polígonos semejantes pueden descomponerse en triángulos semejantes, tirando las diagonales desde un vértice homólogo.

Hip. $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$.

Tes. $\triangle ABC \sim A'B'C'$, $\triangle ACD \sim A'C'D'$, $\triangle ADE \sim A'D'E'$.

Dem. Por ser $\triangle ABC \sim A'B'C'$ (VII. 9), se sigue que

$AC:A'C' = AB:A'B' = DC:D'C'$ (hip.)

ó $AC:A'C' = DC:D'C'$

además $\sphericalangle ACD = A'C'D'$ por ser $\sphericalangle C = C'$ y $\sphericalangle BCA = B'C'A'$

luego $\triangle ACD \sim A'C'D'$; así procediendo adelante se demuestra que sean semejantes todos los triángulos que sucederán.

Teor. 22. (fig. 130). A todo punto dentro de un polígono corresponde un punto homólogo de otro polígono semejante, de modo que estos dos puntos se hallan á distancias proporcionales á los vértices homólogos.

Hip. $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$.
Tes. $OA:OB:OC:OD:OE = O'A':O'B':O'C':O'D':O'E'$.

Dem. Siendo $B'A' = BF$ tracemos $FA'' \ddagger BO$, ademas

$A''B'' \ddagger AB$, $B''C'' \ddagger BC$ &a y finalmente juntemos E'' con A'' y será segun teor. 20:

1º $A''B''C''D''E'' \sim ABCDE \sim A'B'C'D'E'$ (hip.)

2º $A''B''C''D''E'' \cong A'B'C'D'E'$,
porque $A''B'' = A'B'$ por ser $BFA''B''$ un paralelógramo cuyo lado $BF = A'B'$. (constr.)

Ademas $A'B':B'C' = AB:BC = A''B'':B''C''$
ó $A'B':B'C' = A''B'':B''C''$
luego $B'C' = B''C''$ por ser $A'B' = A''B''$.

Se demuestra de la misma manera, que:

$$C''D'' = C'D' \text{ y } D''E'' = D'E' \text{ y } E''A'' = E'A'.$$

Ya sabemos por el nº 1º que $\sphericalangle A' = A''$, $B' = B''$ &a.
Luego tenemos en estos dos polígonos $A'B'C'D'E'$ y $A''B''C''D''E''$ todos los elementos iguales y dispuestos de la misma manera, y por tanto son congruentes.
Ahora describiendo desde A' y B' con los radios $A''O$ y $B''O$ dos arcos que se corten en O', será O' un punto en $A'B'C'D'E'$, que corresponde á O en $A''B''C''D''E''$, y por tanto $A'O' = A''O$, $B'O' = B''O$, $C'O' = C''O$ &a.
Ademas sabemos que:

$$AO:BO:CO:DO:EO = A''O:B''O:C''O:D''O:E''O.$$
luego $AO:BO:CO:DO:EO = A'O':B'O':C'O':D'O':E'O'.$

Cor. 1. Lo mismo se verifica de un punto que está situado **fuera** del perímetro ó en él.
Cor. 2. Luego los polígonos semejantes pueden descomponerse de infinitas maneras en triángulos semejantes.
Cor. 3. Dos polígonos son semejantes si respectivamente á dos puntos pueden descomponerse en triángulos dos á dos semejantes y colocados en el mismo órden.

Teor. 23. (128 y 131). **Si dos polígonos semejantes tienen los lados homólogos paralelos, concurrirán en un mismo punto las rectas que unen los vértices homólogos.**

Hip. **A' y A', B y B', C y C' &a. son vértices homólogos en**

los polígonos semejantes $ABCDE$ y $A'B'C'D'E'$, ademas $AB \ddagger A'B'$, $BC \ddagger B'C'$ &a.

Tes. Trazadas las rectas AA' y BB', hasta que se corten en O, pasará la recta OC por C', la OD por D' &a.

Dem. Corte OC la recta $B'C'$ en un punto X y será
$OB:OB' = BC:B'X$ (VII. 3).

Ademas tenemos por construccion é hipótesis

$$OB:OB' = AB:A'B' = BC:B'C'$$
o $OB:OB' = BC:B'C'$
luego $BC:B'X = BC:B'C'$, lo que da $B'C' = B'X$
y por tanto X es el punto C' ó la recta OC pasa por el punto C'.
De la misma manera se demuestra que OD pasará por D' &a.

Nota. O se llama el punto de semejanza.

Teor. 24. Los perímetros de dos polígonos semejantes son entre sí como dos lados homólogos.

Dem. Siendo a, b, c, d, e, f los lados en el uno y a′, b′, c′, d′, e′, f′, los lados homólogos en el otro polígono semejante, tendremos
$$a:a' = b:b' = c:c' = d:d' = e:e' = f:f'$$
luego $(a+b+c+d+e+f):a'+b'+c'+d'+e'+f' = a:a'$ (VI. 6).

Cor. Los perímetros son tambien proporcionales á las distancias homólogas de dos puntos homólogos.

Teor. 25. (fig. 129). Dos polígonos de (n) lados son semejantes:
1º Si tienen proporcionales entre sí (n—1) lados é iguales los (n—2) ángulos comprendidos entre ellos.
2º Si tienen iguales respectivamente todos los ángulos y proporcionales (n—2) lados homólogos y adyacentes.

Hip. para el 1er caso $\sphericalangle A = A'$, $B = B'$, $C = C'$
ademas $EA:AB:BC:CD = E'A':A'B':B'C':C'D'$

Tes. $\sphericalangle D = D'$ y $E = E'$, ademas $EA:ED = E'A':E'D'$

Dem. $\triangle ABC \sim A'B'C'$ (VII. 9)
luego $AC:A'C' = BC:B'C' = CD:C'D'$ (hip.)
ademas $\sphericalangle ACD = A'C'D'$ por ser $C = C'$ y $\sphericalangle ACB = A'C'B'$,
luego $\triangle ACD \sim A'C'D'$
de donde $AD:A'D' = DC:D'C' = AE:A'E'$ (hip.)
ademas $\sphericalangle DAE = D'A'E'$, por ser $A = A'$ y $\sphericalangle BAD = B'A'D'$
luego $\triangle DAE \sim D'A'E$, y por tanto
$\sphericalangle E = E'$ y $D = D'$, ademas $EA:E'A' = ED:E'D'$

Hip. para el 2º caso. Todos los ángulos respectivamente iguales y $AB:BC:CD=A'B':B'C':C'D'$.
Tes. $CD:DE:EA=C'D':D'E':E'A'$.

Dem. De la misma manera que en el primer caso tendremos $\triangle ACD \sim A'C'D'$ luego $\sphericalangle ADE=A'D'E'$, ademas $\sphericalangle E=E'$ luego $\triangle ADE \sim A'D'E'$ y por tanto

$$CD:DA:DE:EA=C'D':D'A':D'E':E'A'$$

§ 32. PROPORCIONALIDAD DE ÁREAS.

Teor. 26. (fig. 132 y 133). Las áreas de dos rectángulos que tienen iguales alturas, están entre sí como sus bases.

Hip. $AC=A'C'$.
Tes. Rctg. AD: Rctg. $A'D'=AB:A'B'$.

Dem. Caso Iº (fig. 132). Siendo AB y A'B' *conmensurables* y $AP=A'P'$ la medida comun, sea $AB=nAP$ y $A'B'=n'A'P'$, luego la razon $AB:A'B'=\frac{n}{n'}$.

Ahora levantando perpendiculares en los puntos de division, tendremos: Rctg. AQ=Rctg. A'Q' y ademas, por ser iguales todos los Rctg. parciales será: Rctg. AD=n. Rctg. AQ y Rctg. A'D'=n' Rctg. A'Q',

luego la razon Rctg. AD: Rctg. $A'D'=\frac{n}{n'}=AB:A'B'$
ó bien Rctg. AD: Rctg. $A'D'=AB:A'B'$.

Caso 2º AB y A'B' inconmensurables (fig. 133).

1º Estando AB dividido en partes iguales tan pequeñas como se quiera, pongamos una de estas partes como medida sobre A'B', y no podrá el último punto de division N' coincidir con B', por ser inconmensurables AB y A'B'; trazando ahora $N'R' \parallel AB$ será:

Rtg. AD: Rctg. $A'R'=AB:A'N'$ (caso 1º).

2º Podemos hacer que el punto N' se aproxime mas y mas á B', tomando las partes iguales de AB sucesivamente mas pequeñas. y por eso el límite de A'N' será A'B',
ó bien lim. $(AB:A'N')=AB:A'B'$;
por consiguiente se aproximará tambien mas y mas el Rctg. A'R' al Rctg. A'D', y el límite de Rctg A'R' será Rctg. A'D',
ó bien lim. (Rtg. AD: Rctg. A'R')=Rctg. AD: Rctg. A'D'
ademas será siempre Rctg. AD: Rctg. $A'R'=AB:A'N'$
luego Rctg. AD: Rctg. $A'D'=AB:A'B'$ (§ 24, 3).

Cor. 1º Dos rectángulos de igual altura, son proporcionales

á sus bases; pues en los rectángulos pueden considerarse las bases como alturas.

Cor. 2º Las áreas de dos paralelógramos de igual altura son proporcionales á sus bases, y recíprocamente.

Cor. 3º Lo mismo vale de los triángulos.

Cor. 4º De la proporcion de las rectas $a:b=c:d$ se sigue la otra: $a\times p:b\times p=c\times q:d\times q$, en donde p y q son tambien rectas.

Dem. $a\times p:b\times p=a:b$ y $c\times q:d\times q=c:d=a:b$ (teor. 26)
luego $a\times p:b\times p=c\times q:d\times q$,

Teor. 27. Dadas las proporciones de las rectas; $a:b=c:d$ y $e:f=g:h$, serán proporcionales entre sí los cuatro rectángulos formados por los términos correspondientes, es decir:

$$a\times e:b\times f=c\times g:d\times h$$

Dem. $a\times f:b\times f=c\times h:d\times h$
y $a\times e:a\times f=c\times g:c\times h$ (VII. 26 cor. 4).
luego $a\times e:b\times f=c\times g:d\times h$ (VI, 8).

Cor. 1. Si $a:b=c:d$ será $a^2:b^2=c^2:d^2$.
Cor. 2. Si $a:b=b:c$ será $a^2:b^2=a:c$
Dem. $a:b=b:c$
y $a:b=a:b$
luego $a^2:b^2=a\times b:b\times c=a:c$.

Teor. 28. (fig. 134). Las áreas de dos triángulos semejantes están entre sí como los cuadrados sobre dos lados homólogos.

Hip. $ABC \sim A'B'C'$
Tes. $\triangle ABC:A'B'C'=AC^2:A'C'^2=AB^2:A'B'^2$

Dem. Trazando las alturas sobre los lados hamólogos AC y A'C', tendremos:

$BD:B'D'=AB:A'B'=AC:A'C'$. por ser $\triangle ABD \sim A'B'D'$:
ó $BD:B'D'=AC:A'C'$
ademas: $\frac{1}{2}AC:\frac{1}{2}A'C'=AC:A'C'$
luego $\frac{1}{2}AC\times BD:\frac{1}{2}A'C'\times B'D'=AC^2:A'C'^2$ (VII. 27)
ó bien $\triangle ABC:A'B'C'=AC^2:A'C'^2$
sabemos que $AC:A'C'=AB:A'B'$ (hip.)
luego $\triangle ABC:A'B'C'=AC^2:A'C'^2=AB^2:A'B'^2$

Teor. 29. (fig, 129). Las áreas de dos polígonos semejantes están entre sí, como los cuadrados sobre dos lados homólogos

Hip. $ABCDE \sim A'B'C'D'E'$.
Tes. $ABCDE:A'B'C'D'E'=AB^2:A'B'^2$

Dem. Descomponiendo los polígonos en triángulo semejantes tendremos:

$\triangle ABC:A'B'C'=AB^2:A'B'^2$ (VII. 28)
$\triangle ACD:A'C'D'=DC^2:D'C'^2=AB^2:A'B'^2$
$\triangle ADE:A'D'E'=ED^2:E'D'^2=AB^2:A'B'^2$
luego $\triangle ABC:A'B'C'=ACD:A'C'D'=ADE:A'D'E'$

de donde $\triangle ABC+DCD+ADE:A'B'C'+A'C'D'+A'D'E'=$
$=\triangle ABC:A'B'C'=AB^2:A'B'^2$ (VI. 6)

ó bien $ABCDE:A'B'C'D'E'=AB^2:A'B'^2$

Cor. (fig. 130). Por ser $AB:A'B'=OA:O'A'$ tenemos:
$ABCDE:A'B'C'D'E=OA^2:O'A'^2$

Teor. 30. (fig. 122). En el triángulo rectángulo:
1º El cuadrado de la hipotenusa es al cuadrado sobre un cateto como la hipotenusa á la proyeccion del cateto sobre ella.
2º Los cuadrados sobre los catetos están entre sí, como sus proyecciones sobre la hipotenusa.

Hip. $\sphericalangle B=R$ y $BD \perp AC$.
Tes. $AC^2:AB^2:BC^2=AC:AD:DC$.

Dem. $AB^2=AC\times AD$, $BC^2=AC\times DC$ (VII. 14 cor.)
luego $AC^2:AB^2:BC^2=AC^2:AC\times AD:AC\times DC$

sabemos que $AC^2:AC\times AD:AC\times DC=AC:AD:DC$ (VII. 26)

luego $AC^2:AB^2:BC^2=AC:AD:DC$.

Teor. 31. (fig. 135). La suma de los polígonos semejantes construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo es igual al polígono semejante construido sobre la hipotenusa.

Hip. $\sphericalangle B=R$, $S\sim P\sim Q$, AB, BC y AC lados homólogos.
Tes. $S=P+Q$.

Dem. $P:Q=AB^2:BC^2$
luego $P+Q:Q=AB^2+BC^2:BC^2$ (VI. 5)
ademas es $Q:S=BC^2:AC^2$
luego $P+Q:S=AB^2+BC^2:AC^2$ (VI. 8)
sabemos que $AB^2+BC^2=AC^2$
luego $P+Q=S$.

NOTA. Los teoremas del Cap. VI y los del VII especialmente el 5º, 6º, 26º, 27º y sus corolarios contienen la razon geométrica de la ejecucion de las operaciones algébricas con las cantidades geométricas de las proporciones.

En general se puede decir que aun con todo rigor geométrico se pueden hacer las operaciones algébricas con las cantidades geométricas, con tal que cada expresion se pueda interpretar geométricamente.

§ 33. PROBLEMAS ELEMENTARES.

Probl. 1. (fig. 133). Hallar una cuarta proporcional á tres rectas dadas, a, b, c; es decir, que sea: $a:b=c:x$.

Constr. 1ª Formando un ángulo MBN tómese $AB=a$, $CB=b$ y $AD=c$; juntando A con C, trácese $DX \parallel AC$ y será CX la recta pedida.

Dem. (VII. 1).
Const. 2ª por teor. 2º

Probl. 2º Hallar una tercera proporcional á dos rectas dadas: a y b, es decir, que sea $a:b=b:x$.

Const. 1ª es la misma del probl. 1º Const. 2ª (fig. 137). De los lados del ángulo recto QCP tómese $BC=b$ y $AC=a$, júntese A con B, y formando $\sphericalangle ABX=R$, prolónguese AC hasta que corte BX en X y será CX la tercera proporcional.

Dem. (Teor. 14). $AC:CB=CB:CX$.

Probl. 3º (fig. 138). Hallar una media proporcional á dos rectas dadas: a y c, es decir, que sea $a:x=x:c$.

Const. De la recta AC tomemos $AB=a$ y $BC=c$, ahora describiendo sobre AC como diámetro una semicircunferencia, levantemos en B una perpendicular á AC hasta que la corte en X, y BX será la recta pedida.

Dem. $\sphericalangle AXC=R$ [IV. 19].
luego $AB:BX=BX:BC$ [VII. 14].

Probl. 4º [fig. 139]. Dividir una recta AB en partes proporcionales $m:n:p$.

Cor. Formado un ángulo ABN tómese $BC=m$, $CE=n$ y $EF=p$; unido F con A trácese EX y CY paralelas á AF y los puntos X é Y dividen la recta AB en la razon pedida.

Dem. [Teor. 1, cor. 2,].

Probl. 5º (fig. 140). Dividir una recta dada a en media y extrema razon, es decir, que sea $a:x=x:a-x$.

Const. Siendo $AB=a$, tiremos $BO \perp AB$ igual á $\frac{1}{2}AB$, desde O como centro describamos con OB un círculo, y trazando OA, que corte la circunferencia en D hagamos $AX=AD$, y AB será cortada por X en la razon pedida.

Dem. Prolónguese AO hasta cortar la circunferencia en C y será
$AC:AB=AB:AD$ (VII. 17)
luego $AC-AB:AB=AB-AD:AD$ (VI. 5)
pero $AB=DC$ y $AD=AX$ (const.)
luego $AX:AB=XB:AX$ ó $AB:AX=AX:XB$.

Probl. 6. (fig. 141). Sobre una recta dada A'E' construir un polígono semejante á otro dado.

Const. Descompuesto en triángulos el polígono dado por diagonales trazados desde un vértice A, formemos $\sphericalangle E'A'D'=EAD$, $\sphericalangle E'=E$ y tendremos el punto D' correspondiente á D; de la misma manera formados los otros triángulos correspondientes á los del polígono dado estará construido el polígono $A'E'D'C'B' \sim AEDCB$.

Dem. Por la construccion todos los triángulos formados son semejantes á los del polígono dado y colocados del mismo modo y por tanto los polígonos son semejantes. (VII. 22 cor 3.)

Probl. 7. [fig. 142]. **Dividir un triángulo dado en triángulos proporcionales,** $m:n:p$.

Const. Haciendo $AD:DE:EC=m:n:p$ [probl. 4] juntemos B con D y E y tendremos $ABD:DBE:EBC=m:n:p$.

Dem. Todos los triángulos tienen la misma altura, y por eso: $ABD:DBE:EBC=AD:DE:EC=m:n:p$ [VII. 26 cor. 3].

Probl. 8. [fig. 143]. **Dividir un triángulo por una recta paralela á un lado en dos partes proporcionales** $m:n$.

Análisis. Siendo XY la recta pedida, tendremos:

$\triangle XBY:XACY=m:n$

luego $\triangle XBY+XACY:XBY=m+n:m$ [VI. 5]

ó $\triangle ABC:XBY=m+n:m=AB^2:BX^2$ [VII. 28].

Se ve que construida la última proporcion, el problema quedará resuelto; por esto describamos sobre AB como diámetro una semicircunferencia, y formando BD=BX, y $DE \perp AB$, tendremos: $AB^2:BD^2=AB:BE$ [VII 30] $=m+n:m$, por ser BD=BX.

En la última proporcion $AB:BE=m+n:m$ podemos directamente determinar E por probl. 1; por E se determina D, por BD la parte BX y por tanto quedará resuelto el problema.

Const. Haciendo $AB:BE=m+n:m$ [probl. 1], describamos sobre AB como diámetro una semicircunferencia, levantando en E la perpendicular EM á AB, juntemos el punto D con B y describamos con BD desde D un arco que corte BA en X, y trazando $XY \mp AC$ será $\triangle XBY:XYCA=m:n$.

Dem. $AB:BE=m+n:m$ [const.]

ademas $AB:BE=AB^2:BD^2$ [const. y VII 30] $=AB^2:BX^2$ [const.]

luego $AB^2:BX^2=m+n:m$

ademas $AB^2:BX^2=\triangle ABC:XBY$ [VII. 28]

de donde $m+n:m=\triangle ABC:XBY$

ó $m+n-m:m=\triangle ABC-XBY:XBY$ [VI 5]

es decir $n:m=XYCA:\triangle XBY$

ó $\triangle XBY:XYCA=m:n$.

Probl. 8 [fig. 141]. Dado un polígono construir otro semejante, con el cual esté el primero en la razon de *m á n*.

Resolucion. Por medio del probl. 8 se puede hacer que $\triangle AXY:ABC=n:m$; entónces trazando $YZ \mp CD$ y $ZV \mp DE$, será AXYZV el polígono pedido.

Dem. 1° $AXYZV \sim ABCDE$ [const. y VII. 20 cor.].

2° $AXYZV:ABCDE=XY^2:BC^2$

pero $XY^2:BC^2=\triangle AXY:ABC=n:m$ [const.]

luego $AXYZV:ABCDE=n:m$.

CAPITULO VIII.

Polígonos regulares y medida del círculo.

§ 34. PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS REGULARES.

Explicacion 1ª Un polígono que tiene iguales todos sus lados y ángulos se llama regular.

2ª Un polígono está inscrito en una circunferencia, ó una circunferencia está circunscrita á un polígono, si todos sus vértices están en la circunferencia.

3ª Un polígono está circunscrito á una circunferencia, ó una circunferencia está inscrita en un polígono, si todos sus lados son tangentes de la circunferencia.

Teor. 1. Cada ángulo de un polígono regular de n lados es igual á $\left(2-\frac{4}{n}\right)$ rectos.

Dem. En todo polígono la suma de los ángulos es igual á $n2R-4R$, ya sabemos que en un polígono regular, todos los ángulos son iguales, luego cada ángulo igual á $\frac{n.2R-4R}{n}=2R-\frac{4R}{n}$.

Teor. 2. [fig. 144]. Todo polígomo regular tiene un centro que equidista de los vértices y de los lados.

Dem. Dividiendo los ángulos A y B en partes iguales, prolonguemos hasta que se corten en O y el punto O: 1° equidista de los vértices, y 2° de los lados.

Acerca del 1° $\sphericalangle OBA = OBC$ y $AB = BC$
luego $\triangle OBA \cong OBC$ [II 7], ademas son isósceles por ser $\sphericalangle \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}B$,
luego $BO = AO = CO$.

De la misma manera se demuestra que todos los triángulos restantes son congruentes entre sí, y por tanto
$$OA = OB = OC = OD = OH = OE$$
acerca del 2° Tracemos $OF \perp AE$ $OG \perp ED$, $OH \perp CG$ &a. y diremos que todas estas perpendiculares son iguales entre sí.

Todos los triángulos formados AOE, EOD, DOC &a. son congruentes entre sí é isósceles, luego así como tienen igual base así tambien igual altura.

Cor. 1. Á todo polígono regular se puede circunscribir é inscribir un círculo. Sabemos que el punto O equidista de todos los vértices, luego describiendo un círculo con esta distancia como radio desde el punto O, pasará la circunferencia por los vértices; ademas describiendo un círculo desde el punto O con la distancia igual de los lados, tendrá la circunferencia todos los lados, por tangentes.

Nota. El radio del círculo circunscrito se lama radio del polígono, y el radio del círculo inscrito apotema; el primero se denota por r (R), el segundo por ρ.

Cor 2. Son congruentes entre sí todos los triángulos, que se pueden formar juntando el centro con los vértices, lo que hemos visto en la demostracion del teorema.

Cor. 3. El radio del polígono regular es bisectriz de los ángulos, pues es el fundamento de la demostracion.

Cor. 4. El ángulo que forman dos radios sucesivos es igual á $\frac{4R}{n}$ es decir $\sphericalangle AOB = \frac{4R}{n}$, puesto que los n triángulos son congruentes. Dicho ángulo se llama ángulo al centro.

Cor. 5. Lo mismo vale relativamente á las apotemas.

Cor. 6. El apotema divide cada lado y el arco correspondiente en dos partes iguales, puesto que es el radio perpendicular á la cuerda.

Teor. 3. Todo polígono equilateral é inscrito en un círculo es regular.

Dem. Todos los ángulos del polígono están inscritos y sus lados abrazan arcos iguales, por ser todos los lados iguales, y por tanto son tambien iguales los ángulos.

Cor. Luego si se halla la circunferencia dividida en n partes iguales, tendremos uniendo los puntos sucesivos de division un polígono regular con n lados.

Teor. 4. [fig. 145]. **Todo polígono equiángulo y circunscrito á un círculo es regular.**

Hip. $\sphericalangle A = B = C$ &a. $OF = OG = OH$ &a. y son perpendiculares á los lados respectivos.
Tes. $AB = BC$ &a.

Dem. $FB = BG$ y OB bisectriz del $\sphericalangle B$, OA del $\sphericalangle A$ &. (IV 22).
luego $\triangle AOB$, BOC &a. son isósceles, por ser $\sphericalangle A = B$ &a,
de donde $AF = FB$ y $BG = GC$ &a. (II. 13)
ó $BF = \frac{1}{2}AB$ y $BG = \frac{1}{2}BC$;
sabemos que $BF = BG$
luego $AB = BC$

De la misma manera se demuestra que $BC = CD = DE = EA$.

Teor. 5. **El área de un polígono regular es igual á un rectángulo formado por la mitad del perímetro y por el apotema.**

Dem. El polígono regular se descompone en n triángulos congruentes, que tienen por base el lado del polígono y por altura el apotema; luego designando por S el área, por b el lado y por P el perímetro del polígono regular tendremos:
$$S = n\triangle = n.\tfrac{1}{2}b \times \rho = \tfrac{1}{2}n.b \times \rho = \tfrac{1}{2}P \times \rho.$$

Teor. 6. **Los polígonos regulares de un mismo número de lados son semejantes entre sí,**

Dem. Todos los ángulos son respectivamente iguales y están colocados en el mismo órden, por ser cada uno de ellos igual á $(2R - \frac{4}{n}R)$; ademas la razon entre dos lados es siempre la misma, puesto que un polígono regular tiene todos los lados iguales.

Teor. 7. **Los perímetros de dos polígonos regulares de un mismo número de lados son proporcionales á sus radios y apotemas.**

Dem. $P:P' = b:b'$ (VII. 24.)
ademas $b:b' = r:r' = \rho:\rho'$ pues forman triángulos semejantes,
luego $P:P' = r:r' = \rho:\rho'$

Teor. 8. **Las áreas de dos polígonos regulares de un mismo número de lados son proporcionales á los cuadrados de sus radios y sus apotemas.**

Dem. $S:S' = b^2:b'^2$ (VII. 29)
$b:b' = r:r' = \rho:\rho'$
luego $S:S' = r^2:r'^2 = \rho^2:\rho'^2$.

§ 35. PROBLEMAS.

Probl. 1° Dado un polígono regular inscrito, construir el circunscrito del mismo número de lados.

Const. 1ª (fig. 146). Siendo ABCDE el polígono regular inscrito, tracemos las tangentes en los vértices A, B &c. hasta cortarse y tendremos el polígono regular pedido.

Dem. 1° Tendremos un polígono con el mismo número de lados. Las tangentes en A y B forman con el lado AB ángulos agudos luego se cortan sobre AB, ó forman allí un vértice A', lo mismo vale relativamente á los otros lados, luego tendremos un polígono que tiene tantos vértices cuantos lados tiene el otro, y por tanto tiene tambien el mismo número de lados.

2° El polígono es circunscrito por ser todos los lados tangentes (Const.)

3° El polígono es regular.

Por ser arc. AB=arc. BC se sigue

$\sphericalangle A'AB = A'BA = B'BC = B'CB$ (IV. 21)

luego $\sphericalangle A' = B' = C'$ &a. (I. 14)

" $A'B' = B'C' = C'D'$ &a. (VIII. 4).

Const. 2ª (fig. 147). Siendo AB el lado del polígono regular de n lados, bajemos desde el centro O una perpendicular á AB, y prolongándola hasta que corte á la circunferencia en C, tracemos por C una tangente que corte en F y E á los radios OB y OA prolongados.

Repitiendo esta construccion en cada uno de los lados del polígono inscrito, nos resultará un polígono regular con el mismo número de lados.

Dem. 1° Resultará un polígono con n lados.

Siendo $OH \perp BG$ ó $\sphericalangle D'OB = DOB$, pasará la tangente en H por F, porque juntando F con H será $\sphericalangle OHF = R$ por ser $\triangle OHF \cong OCF$ (II. 7). Lo mismo valdrá para las demas tangentes relativamente á los puntos J, K &a. Luego resultará un polígono que tiene tantos vértices cuantos el primero, y por tanto tiene tambien el mismo número de lados.

2° Resultará un polígono circunscrito por ser todos los lados tangentes (Constr.)

3° Resultará un polígono regular,

$\sphericalangle B = \sphericalangle F$, $\sphericalangle G = J$, $\sphericalangle M = K$ &a. (I. 12)

pero sabemos que $\sphericalangle B = G = M$ &a. (hip.)

luego $\sphericalangle F = J = K$ &a.

" $EB = FJ = JK$ &a. (VIII. 4).

Probl. 2° (fig. 147). Dado un polígono regular inscrito, formar otro inscrito con doble número de lados.

Const. Siendo arc. AC=arc. CB y arc. BH=arc. HG &a. júntese A con C, C con B, B con H &a. y resultará el polígono pedido.

Dem. 1° Tendremos un polígono inscrito con doble número de lados, por estar todos los vértices en la circunferencia y duplicados.

2° El polígono es regular. Puesto que todos los arcos correspondientes á los lados del polígono nuevo son iguales entre sí (constr.) y por tanto lo son los lados (IV. 4), luego dicho polígono es regular (VIII. 3.)

Probl. 3. Dado un polígono regular inscrito formar el circunscrito con doble número de lados.

Constr. 1ª Fórmese segun el probl. 2 el inscrito con doble número de lados, despues segun el probl. 1° el circunscrito.

Constr. 2ª (fig. 148). Siendo AB el lado del polígono dado, formemos segun el probl. 1, constr. 2ª el lado del polígono regular circunscrito correspondiente sea CE; despues trazando las bisectrices de los ángulos DOA y DOB, y prolongándolas hasta cortar CE en los puntos J y L, será JL el lado del polígono regular circunscrito con doble número de lados.

Dem. Por ser $\sphericalangle GOD = HOD$ (const.), OD será como á AB tambien perpendicular á GH (II. 13), luego $GH \ddagger AB$; ademas es $GH = AD$ por ser $\sphericalangle GOH = AOD$ (const.), pero AD es el lado del polígono regular inscrito con doble número de lados (probl. 2°), luego lo será tambien GH y por tanto JL el lado del polígono regular circunscrito con el mismo número de lados (probl. 1° constr. 2ª)

Nota 1ª Se ve cuan importante es la 2ª construccion por estar incluidos en ella el probl. 1° y 2°; por tanto deduzcamos algunos corolarios.

Cor. 1° $JA = JD$ y $JA \perp AO$ por ser $\triangle JAO \cong JDO$.

Cor 2° Trazando $MN \ddagger AF$ se sigue que

$DN = NF$ [III. 12), luego $FF' > F'D$,

y por tanto duplicando siempre los lados del polígono, el punto F' se aproximará mas y mas al punto D ó bien el apotema se aproximará mas y mas al radio.

Nota 2ª Si la circunferencia está dividida en n partes iguales, lo será tambien los 4R al rededor del centro é inversamente [IV, 4.]

Nota 3ª Si dividimos la circunferencia en un número cualquier de partes iguales y unimos sucesivamente con rectas los puntos inmediatos de modo que quede formado un polígono, es evidente que será regular, puesto que todos sus lados y ángulos son iguales entre sí; luego se pueden inscribir geométricamente en un círculo tantos polígonos regulares cuantas sean las partes iguales en que se puede dividir geométricamente la circunferencia.

Probl. 4° (fig. 149). Dividir una circunferencia en cuatro dartes iguales ó inscribir un cuadrado en ella.

Const. Trazados dos diámetros perpendiculares queda la circunferencia dividida en 4 partes iguales, y juntando los puntos estremos tendremos el cuadrado ABCD.

Dem. Es manifiesta.

Prob. 5. (fig. 150). Dividir una circunferencia en seis partes iguales ó inscribir en ella un exágono regular.

Const. Desde un punto A descríbese con AO como radio un arco que corte la circunferencia en B, y el arc. AB será la sesta parte de la circunferencia y la cuerda AB el lado del polígono regular pedido.

Dem. Júntese A y B con O y será $\triangle AOB$ equilateral y por tanto $\sphericalangle AOB=\frac{2}{3}R=\frac{4R}{6}$, luego es el arc. AB la sesta parte de la circunferencia, y por tanto $AB=r$ el lado del exágono regular y $6AB=6r$ su perímetro (véase Nota 2ª)

Cor. 1. Como ahora es fácil construir el lado del exágono regular circunscrito, así lo es encontrar por cálculo su valor numérico.

Siendo en la fig. 148 $MN=ON=1$ y PQ el lado del exágono regular circunscrito será

$$PQ:MN=OR:OS$$

en donde $OS^2=ON^2-SN^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

luego $OS=\frac{1}{2}\sqrt{3}$

" $PQ=\frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$

y por tanto el perímetro del exágono regular circunscrito será $4\sqrt{3}$ si el radio es igual á la unidad.

Cor. 2. Siendo (fig. 150) $AB=BC$ será la recta AC el lado del triángulo regular, pues $\sphericalangle AOC=\frac{8R}{6}=\frac{4R}{3}$, por ser arc. $AB=BC$.

Probl. 6. (fig. 151). Dividir una circunferencia en diez partes iguales ó inscribir en ella un decágono regular.

Análisis. Siendo el arc. AB la décima parte de la circunferencia ó la cuerda AB el lado del decágono regular, será $\sphericalangle AOB=\frac{2}{5}R$ y por tanto $\sphericalangle OAB=OBA=\frac{4}{5}R$; ahora trazando la bisectriz del $\sphericalangle OAB$, será $\triangle BAM$ y AMO isósceles, ó $AB=AM=MO$,

ademas $AO:AB=OM:MB$ (VII. 12)

ó $OB:OM=OM:MB$ por ser $AB=OM$.

Luego OB se halla dividida en media y extrema razon.

Constr. Dividido el radio OB en media y extrema razon, es decir, de modo que $OB:OM=MO:MB$, se tome la cuerda $BA=OM$ y será el arc. AB la décima parte de la circunferencia y la cuerda AB el lado del decágono regular.

Dem. Por ser $OB:OM=OM:MB$ y $OM=AB$, tendremos

1º) $OA:AB=OM:MB$, luego AM la bisectriz del $\sphericalangle OAB$ (VII. 13).

2º) $OA:AB=AB:BM$, de donde por ser $\sphericalangle OAB=ABM$ $\triangle OAB\sim ABM$, luego $\triangle MAB$ isóscele, y por tanto $\sphericalangle MAB=AOB=MAO$ (1º)

ó $\sphericalangle OAB=2AOB$.

Ya sabemos que $\sphericalangle AOB+2OAB=2R$ ó $5AOB=2R$ luego $AOB=\frac{2}{5}R=\frac{4R}{10}$ y por consiguiente será el arc. AB la décima parte de la circunferencia y la cuerda AB el lado del decágono regular. (Véase Nota 2ª)

Cor. Siendo $BC=BA$ será el arco ABC la quinta parte de la circunferencia y la cuerda AC el lado del pentágono regular, por ser $\sphericalangle AOC=2AOB=\frac{4R}{5}$.

Probl. 7. Dividir una circunferencia en quince partes iguales ó inscribir en ella un pentadecágono regular.

Resol. Podemos geométricamente formar $\sphericalangle\frac{1}{6}4R$, ademas, segun el probl. 6º $\sphericalangle\frac{1}{10}4R$ y por tanto un $\sphericalangle(\frac{1}{6}-\frac{1}{10})4R=\frac{2}{30}.4R=\frac{4R}{15}$; luego se puede construir la décima quinta parte de la circunferencia y el lado del pentedecágono regular.

§ 36. PROPORCIONES RELATIVAMENTE AL CÍRCULO.

Explicaciones.

1ª (fig. 152). Siendo AFCEB una curva y su cuerda AB, tomemos un punto C próximamente en la mitad de la curva, y juntando C con A y B vemos que la suma $AC+CB$ se aproxima mas á la curva que AC; tomando despues F y E próximamente en las respectivas mitades de AC y CB, la línea quebrada AFCEB se aproxima ya mas á la curva que la anterior; y procediendo de esta manera tendremos una línea quebrada que se aproximará mas y mas á la curva; pues ya en la sesta division no se puede distinguir sensiblemente á la curva de la recta.

Pero procediendo indefinidamente de este modo tomando cada vez las cuerdas mas pequeñas podremos hacer que la diferencia entre la curva propuesta y la línea quebrada sea menor que cualquier cantidad asignable; por tanto, segun la definicion admitida para el límite, la curva será el límite de la línea quebrada.

Observemos que la línea quebrada pasa á su límite por incrementos sucesivos por ser $AC+CB>AB$, una relacion constante entre las demas cuerdas.

Esto supuesto pongamos.

Principio 1º Toda curva convexa es el límite de una línea quebrada, cuyos lados son cuerdas y llegan á ser menores que cualquier cantidad por pequeña que sea.

2ª Siendo para la misma curva AD y BD dos tangentes en los puntos A y B que se corten por la parte superior de AB, tracemos por el punto C una tangente, y veremos que la suma AH+HG+GB se aproxima á la curva mas que la AD+DB; trazando despues por F y E tangentes es manifiesto que la línea quebrada ALJKMB se aproxima ya mucho mas á la curva que la anterior; y procediendo de esta manera tendremos presto una línea quebrada, que se puede confundir sensiblemente con la curva. Luego procediendo indefinidamente tomando cada vez tangentes mas pequeñas podremos hacer que la diferencia entre la curva propuesta y la línea quebrada sea menor que cualquier cantidad asignable; por tanto será la curva el límite de la línea quebrada.

Observemos que la línea quebrada, cuyos lados son tangentes pasa á su límite decreciendo, por ser $HG<HD+GD$ una relacion constante entre las demas tangentes.

Por esto pondremos.

Principio 2º Toda curva convexa es el límite de una línea quebrada, cuyos lados son tangentes y llegan á ser menores que cualquier cantidad por pequeña que sea.

Nota 1ª Estos dos principios valen para todas las curvas, para verlo debemos muchas veces descomponer la curva propuesta en otras dos convexas como en la fig. 153, donde A es el punto de flexion.

Nota 2ª Estos dos principios valen tambien relativamente á las áreas, lo que es manifiesto.

3ª Aplicando estos dos principios al círculo, podemos decir:

La circunferencia es el límite de un polígono inscrito y regular, cuyos lados se duplican indefinidamente; este perímetro pasará á su límite recibiendo incrementos sucesivos, luego absolutamente será siempre menor que la circunferencia.

La circunferencia es el límite del perímetro de un polígono regular y circunscrito, cuyos lados se duplican indefinidamente; este perímetro pasará á su límite decreciendo, luego absolutamente será siempre mayor que la circunferencia.

Teor. 9. Dos circunferencias son proporcionales á sus radios.

Dem. Designemos por C y C′ dos circunferencias, cuyos radios sean R y R′; ademas siendo P y P′ los perímetros de dos polígonos regulares con el mismo número de lados inscritos el primero en la circunferencia C y el otro en la C′, tendremos siempre la proporcion:

$$P:P'=R:R' \text{ ó } P:R=P':R', \text{ (VIII. 7)}$$

aunque duplicásemos mas y mas juntamente los lados, por ser siempre los polígonos semejantes (VIII. 6).

Ahora aplicando el teorema de los límites (§ 24. 3) será:

$$\text{lim. } (P:R)=C:R \text{ por ser lim. } P=C$$
y $$\text{lim. } (P':R')=C':R' \text{ por ser lim. } P'=C'$$
luego $$C:R=C':R'$$
ó $$C:C'=R:R'.$$

Teor. 10. Las áreas de dos círculos son proporcionales á los cuadrados de sus radios.

Dem. Designemos por C_s y C_s' las áreas de dos círculos cuyos radios sean R y R′; ademas, siendo S y S′ las áreas de dos polígonos regulares con el mismo número de lados é inscritos el primero en la circunferencia C y el otro en la C′, tendremos siempre la proporcion:

$$S:S'=R^2:R'^2 \text{ ó } S:R^2=S':R'^2 \text{ (VIII. 8)},$$

aunque duplicásemos mas y mas juntamente los lados, por ser siempre los polígonos semejantes. (VIII. 6).

Ahora aplicando el teorema de los límites (§ 24, 3) será:

$$\text{lim. } (S:R^2)=C_s:R^2, \text{ por ser lim. } S=C_s$$
y $$\text{lim. } (S':R'^2)=C'_s:R'^2, \text{ por ser lim. } S'=C'_s$$
luego $$C_s:R^2=C_s':R'^2, \text{ ó } C_s:C_s'=R^2:R'^2.$$

Cor. Sabemos que $C:R=C':R'$ ó $C:2R=C':2R'$, luego la razon de la circunferencia á su diámetro es constante, y si conocemos esta razon para un círculo la conoceremos para todos.

El número que expresa esta razon se llama π y está calculado aproximadamente $\pi=3,14159\dots$ lo que veremos en el § siguiente.

Con lo que tenemos $C:2R=\pi$
luego $$C=2\pi R.$$

Teor. 11. El área de un círculo es igual á un rectángulo cuya base es la mitad de la circunferencia y cuya altura es el radio.

Dem. Tomando la misma expresion que arriba y ademas designando por ρ el apotema del polígono tendremos:

$$S=\tfrac{1}{2}P\times\rho$$
sabemos que $\text{lim. } S=C_s$, y $\text{lim. } \tfrac{1}{2}P\times\rho=\tfrac{1}{2}C\times R$
por ser $\text{lim. } P=C$ y $\text{lim. } \rho=R$ (§ 35 probl. 3. Nota 1ª)
luego $$C_s=\tfrac{1}{2}C\times R.$$

Cor. $C_s=\pi R^2$ por ser $C=2\pi R$.

Teor. 12. (fig. 154). Los arcos de dos círculos iguales ó de un mismo círculo son proporcionales á sus ángulos centrales.

Dem. Caso 1º Siendo los arc. AB y A′B′ *conmensurables*, supongamos que sea arc. AM=A′M′ la medida comun entre ellos,
y $$\text{arc. } AB=m\,(4)\,AM \text{ y arc. } A'B'=n\,(7)\,A'M'$$
luego la razon arc. $AB:A'B'=\frac{m}{n}\left(\frac{4}{7}\right)$.

Ahora juntando los puntos de division en los respectivos arcos con sus centros, serán todos los ángulos parciales iguales entre sí (IV. 4) y por tanto:

$$\sphericalangle AOB=m.AOM \text{ y } \sphericalangle A'O'B'=n.A'O'M'$$

luego la razon $\sphericalangle AOB:A'O'B'=\frac{m}{n}\left(\frac{4}{7}\right)$;

sabemos ya que la razon arc. $AB:A'B'=\frac{m}{n}$

luego $\sphericalangle AOB:A'O'B'=$arc. $AB:A'B'$.

2º Caso. Arc. DE y D'E' sean inconmensurables.

1º Estando el arc. DE dividido en partes iguales tan pequeñas como se quiera, pongamos una de estas partes como medida sobre el arc. D'E', y no podrá el último punto de division P coincidir con E', por ser inconmensurables los arc. DE y D'E'; trazando ahora O'P, será

$$\text{Arc. } DE:D'P=\sphericalangle DOE:D'O'P \text{ (caso 1º)}$$

2º Podemos hacer que el punto P se aproxima mas y mas al E' tomando las partes iguales del arc. DE sucesivamente mas pequeñas, por eso el límite de D'P será D'E',

ó bien lim. de la razon (arc. $DE:D'P$)=arc. $DE:D'E'$; por consiguiente se aproximará tambien mas y mas el $\sphericalangle D'O'P$ al $\sphericalangle D'O'E'$ ó el lim. del $\sphericalangle D'O'P$ será $D'O'E'$;

ó bien: lim. de la razon $(\sphericalangle DOE:D'O'P)=\sphericalangle DOE:D'O'E'$;

ademas será siempre: arc. $DE:D'P=\sphericalangle DOE:D'O'P$ (caso 1º)

luego $\sphericalangle DOE:D'O'E'=$arc. $DE:D'E'$ (§ 24. **3**).

Cor. Lo mismo vale de los sectores, pues la demostracion será la misma poniendo solamente en lugar de ángulo la palabra "sector".

Teor. 13. (fig. 155). Dos arcos de círculos desiguales que tienen ángulos centrales iguales, son proporcionales á sus radios.

Hip. $\sphericalangle AOB=A'O'B$.
Tes. Arc. AB:arc. $A'B'=OA:O'A'$.

Dem. Arc. $AB:C=\sphericalangle AOB:4R$
y arc. $A'B':C'=\sphericalangle A'O'B':4R$
luego Arc. $AB:C=$arc. $A'B':C'$ por ser $\sphericalangle AOB=A'O'B'$ (hip.)
ó Arc. AB:arc. $A'B'=C:C'=OA:O'A$ (VIII. 9).

Cor. El teor. 12 sirve de fundamento para medir un ángulo por un arco, pues creciendo un arco en cierta razon, crecerá en la misma el ángulo central correspondiente, es decir, si un arco a es la nª parte de la circunferencia C, tambien el ángulo central correspondiente α será la nª parte de 4 R; puesto que

$$C:a=4R:\alpha \quad \text{ó} \quad C:\frac{1}{n}C=4R:\alpha$$

luego $4R:\alpha=n$ lo que dará

$$\alpha=\frac{4R}{n}.$$

Ahora bien, imaginémonos una circunferencia dividida en 360 partes iguales llamadas grados y uniendo los puntos de division con el centro, estarán tambien divididos los 4R en 360 y 2R en 180 y 1R en 90 partes iguales, que tambien se llaman grados.

Para obtener divisiones mas menudas se divide el grado en 60 minutos, este en 60 segundos, que se escriben en vez de 32 grados, 17 minutos, 53 segundos, así, 32° 17′ 53″.

Para apreciar prácticamente estos valores se hace uso de un instrumento llamado transportador, que es un semicírculo, cuyo arco está dividido en 180°: ahora para medir un ángulo, colóquese el centro del transportador sobre el vértice del ángulo, de manera que el diámetro notado por 0 caiga sobre un lado del ángulo, y véase cuántos grados indica el otro en la graduacion.

Por médio del mismo instrumento será fácil formar en el papel un ángulo, por ej. de 27°.

Nota. La division moderna ó centecimal, es decir la del cuadrante de la circunferencia en 100 grados y el grado en 100 minutos y el minuto en 100 segundos &a., todavía no está muy admitida, pues su introduccion envuelve muchas dificultades.

Teor. 14. (fig. 155). Los sectores y segmentos en círculos desiguales que tienen ángulos centrales iguales, son proporcionales á los cuadrados de sus radios.

Tes. 1º Sect. AOB:sect. $A'O'B'=R^2:R'^2$.
2º Segt. AB:segt. $A'B'=R^2:R'^2$.

Dem. para 1º Sect. $AOB:C_s=\sphericalangle AOB:4R$ (VIII. 12 cor.)
Sect. $A'O'B':C'_s=\sphericalangle A'O'B':4R$
luego Sect. $AOB:C_s=A'O'B':C'_s$ por ser $\sphericalangle AOB=A'O'B'$ (hip.)
ó Sect. $AOB:A'O'B'=C_s:C'_s=R^2:R'^2$ (VIII. 10).

Dem. para 2º Sect. AOB:sect. $A'O'B'=R:R'^2$
$\triangle AOB:\triangle A'O'B'=R^2:R'^2$ por ser $\triangle AOB\sim A'O'B'$
luego Sect. AOB:sect. $A'OB'=\triangle AOB:\triangle A'O'B'$
ó Sect. $AOB:\triangle AOB=$sect. $A'O'B':\triangle A'O'B'$
luego
Sect. $AOB-\triangle AOB:\triangle AOB=$sect $\triangle A'O'B'-\triangle A'O'B':\triangle A'O'B'$
ó Segt. $AB:\triangle AOB=$Segt. $A'B':\triangle A'O'B'$
ó Segt. AB:segt. $A'B'=\triangle AOB:\triangle A'O'B'=R^2:R'^2$.

§ 37. DETERMINACION DEL VALOR DE π.

Problema. Dados los perímetros del polígono regular inscrito y circunscrito de n lados, hallar una fórmula que exprese el perímetro del polígono regular circunscrito ó inscrito de 2n lados.

Constr. (fig. 156.) Siendo AB el lado del polígono inscrito con n lados, y dividiendo $\sphericalangle AOB$ en dos partes iguales por OC, será EF que es la tangente en C el lado del polígono regular circunscrito con el mismo número de lados (§ 35 probl. 3 const. 2ª); juntando despues A con C y dividiendo $\sphericalangle AOC$ en dos partes iguales por OD, será AD=DC el medio lado del polígono regular circunscrito con 2n lados; por lo que haciendo lo mismo en otra parte, GD será todo el lado del dicho polígono, ademas sabemos que $\triangle OAD \cong OCD$ (II. 7) luego $AD=DC$ y $\sphericalangle OAD=R$
pero $DC=\frac{1}{2}GD$ luego $AD=\frac{1}{2}GD$.

Por ser AC el lado del polígono regular inscrito con 2n lados se necesita determinar AD y AC.

Designemos por P_i y P_c los perímetros del polígono inscrito y circunscrito con n lados y por P'_i P'_c los con 2 n lados.

1ª parte determinar P'_c.

$$ED:DC=OE:OC\ (=OA)=EC:AI=P_c:P_i$$

luego $$ED+DC:DC=P_c+P_i:P_i$$

ó $$EC:DC=P_c+P_i:P_i$$

pero $$EC:DC=4n.EC:4n.DC=2P_c:P'_c$$

luego $$2P_c:P'_c=P_c+P_i:P_i$$

" $$P'_c=\frac{2.P_c.P_i}{P_c+P_i}$$

2ª parte determinar P'_i

$$\triangle DHC \sim CJA \text{ por ser arc. } AC=\text{arc. } BC$$

luego $$CH:CD=AJ:AC=AJ:2CH$$

" $$4n.CH:4nCD=2nAJ:4nCH$$

ó $$P'_i:P'_c=P_i:P'_i$$

luego $$P'_i=\sqrt{P'_c\,P_i}$$

APLICACION PARA DETERMINAR EL VALOR DE π.

Calculado en el sistema decimal por medio de dichas fórmulas los perímetros de dos polígonos regulares con n lados, uno inscrito, otro circunscrito á una circunferencia, tendremos el valor de esta exacta hasta el lugar decimal que tengan los dos perímetros comunes, pues el valor de la circunferencia estará siempre entre el de los dos perímetros.

Para comenzar el cálculo tomemos el polígono del exágono regular inscrito y circunscrito. Sabemos relativamente al exágono regular que $P_i=6$ y $P_c=4\sqrt{3}$ siendo $r=1$ (§ 35 probl. 5 cor. 1).

De donde por medio de

$$P'_c=\frac{2P_c.P_i}{P_c+P_i} \text{ y } P'_i=\sqrt{P'_c.P_i}$$

$$_{12}P_c=\frac{2.6.4\sqrt{3}}{6+4\sqrt{3}}=\frac{24\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}=6,4308806.....$$

$$_{12}P_i=\sqrt{\frac{24\sqrt{3}}{3+2\sqrt{3}}.6} \qquad =6,2116570.....$$

Por ser $r=1$ y la circunferencia igual á 2π, será 2π al ménos igual á 6 ó π á 3.

Aplicando en adelante dichas fórmulas tendremos por cálculo la tabla siguiente:

El número de lados	Valor del perímet. del polígono circunscrito.	Valor del perím. del polígono inscrito.	Valor aproximado de π.
6	6,9282032..	6,0000000..	3,
12	6,4307806..	6.2116570..	3,
24	6,3193198..	6-2652572..	3,1
48	0,2921724..	6,2787004..	3,1
96	6,2854291..	6,2820639..	3,14
192	6,2837461..	6,2829049..	3,141
384	6,2833254..	6,2831152..	3.141
768	6,2832203..	6,2831677..	3,141
1536	6,2831940..	6,2831809..	3,14159

Arquímedes halló primeramente que la razon de la circunferencia al diámetro ó el valor de π está entre $\frac{22}{7}$ y $\frac{223}{71}$. Pedro Mecio (1550) la determinó por $\frac{355}{113}$ y despues Ludolf de Ceulen (1587) ya hasta 32 lugares decimales, y por tanto se llama el valor de π espresado en fraccion decimal el número de Ludolf. Los modernos por medio del análisis superior, han hallado el valor de π mas aproximado, por ej., Richter hasta 500 lugares decimales.

$$\pi=3,14159265358979323846....$$

$$\log.\ \pi=0,49714987......$$

$$\frac{1}{\pi}=0,3183099,\ \log.\ \frac{1}{\pi}=0,5028501-1$$

§ 38. FÓRMULAS PARA RESOLVER ALGUNOS PROBLEMAS NUMÉRICOS POR MEDIO DEL VALOR DE π.

Designemos por r el radio, por C la circunferencia, por C, e área del círculo, por a un arco, cuyo valor de grados n, por s el área de un sector.

Conocido r se puede determinar los valores de todas las otras cantidades.

1ª $C=2\pi r$ de donde $r=\frac{C}{2\pi}$

2ª $C_s=\pi r^2 \dots\dots\dots r=\sqrt{\frac{C_s}{\pi}}$

3ª $a=\frac{n^\circ}{180}\pi r \dots\dots\dots r=\frac{180.a}{n^\circ.\pi}$ y $n^\circ=\frac{180.a}{\pi.r}$

pues $a:2\pi r=n^\circ:360^\circ$ (VIII. 12.)

4ª $s=\frac{n^\circ}{360}\pi r^2$ de donde $r=\sqrt{\frac{s.360^\circ}{n^\circ.\pi}}$ y $n^\circ=\frac{s.360^\circ}{r^2.\pi}$

pues $s:\pi r^2=n^\circ:360$ (VIII. 12 cor.)

Ejemplos para formar 3ª siendo r=1, ademas

1º $n=36^\circ$

$a=\frac{36}{180}.3{,}14159=\frac{2}{10}.3{,}141592=0{,}628318$

2º $n=87^\circ\ 35'\ 14''=315314''$

$a=\frac{315314}{180.60^2}.3{,}141592.$

El cálculo se ejecutará mas fácilmente por los logaritmos.

$\log a=\log 315314+\log\pi-(\log 180+2\log 60)$

$$\begin{array}{ll}
\log 315314 & =5{,}4987432\\
\log \pi & =0{,}4971499\\
\hline
 & +5{,}9958931
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
\log 180 & =2{,}2552725\\
2\log 60 & =3{,}5563026\\
\hline
 & -5{,}8115751\\
\hline
 & +0{,}1843180
\end{array}$$

$\log a=0{,}1843180=\log 1{,}528685$

ó $a=1{,}528685.$

Es decir, si un arco dado por grados es igual á $87^\circ\ 35'\ 14''$ será su longitud comparada con el radio igual á la unidad 1,528685.

Nota. Por medio de las fórmulas recíprocas se encuentran r ó n° si se conocen las otras cantidades.

CAPITULO IX.

Ejercicios prácticos.

§ 39. ADVERTENCIAS.

1ª Los ejercicios prácticos tienen por objeto el responder á las preguntas propuestas y el dar las respectivas demostraciones, como tambien la resolucion de los problemas gráficos. Muchas veces se indica lo suficiente que puede servir de norma de la resolucion completa; sinembargo será muy útil que el estudiante procure resolver por sí estos problemas sin acudir á la clave.

2ª En la ejecucion de los problemas y teoremas solo se pueden aplicar los capítulos respectivos antecedentes, no los siguientes.

3ª Para abreviar llamaremos:

a) en un triángulo isósceles los lados iguales solamente *lados* y *base* el tercer lado; por consiguiente la perpendicular desde el vértice á la base *altura*, y las alturas que pertenecen á los lados iguales *alturas laterales*.

b) En un triángulo cualquiera (fig. 158) denotaremos los tres lados por a, b y c, los ángulos opuestos por α, β y γ; las alturas que pertenecen á los lados respectivos por h_a, h_b y h_c; m y n los segmentos en que por la altura queda dividida la base, es decir, DC=m, DB=n, sea el triángulo agudo ú obtuso.

c) (a+b) dice que se da la suma de las rectas a y b, aunque no se conozcan a ni b; (a—b) dice que se da la diferencia entre a y b &a.

d) X, Y, Z &a. denotan generalmente puntos incógnitos como x, y, z &a. rectas incógnitas.

* **4ª** Para resolver los problemas gráficos no se puede dar una regla general que sirva de norma para todos, sino cada uno generalmente pide una especial consideracion. Con esto se ve que el análisis geométrica es de suma importancia y que requiere mas que mediana observacion para investigar la relacion que entre sí guardan las cantidades que se han de construir y la manera de hacerlo; por eso pongamos unas observaciones:

* La advertencia 4ª es importante y se necesita leerla no solo en el principio sino mucho mas si se han hecho ya muchos ejercicios.

a) Sobre todo se necesita saber claramente lo que se quiere ejecutar, por ej., construir una figura tal, y ademas los medios que sirvan para ejecutarlo. Por consiguiente se debe construir ántes la figura pedida segun su forma específica, sin ceñirse precisamente á la medida prescrita; despues en dicha figura constrúyanse todas las cantidades dadas y si no están ya determinadas por la figura, trácense estas de manera que estén entre sí unidas, pues juntas servirán para resolver el problema.

Esta es la razon porque se dice en el análisis: Sea por ej. ABCD la figura pedida.

Nota. La figura ha de ser bastante exacta, pues una figura confusa no puede dar claridad alguna.

b) Despues de esto pasemos á averiguar la relacion que hay entre las cantidades dadas y las pedidas; si el problema manifiestamente no se redujera á alguno de los ya resueltos, exprésese por alguno de los teoremas del sistema ó bien por algun recíproco, máxime si presenta alguna dificultad, dicha resolucion depende muchas veces de una consecuencia de materia tratada anteriormente; es claro que cuanto mejor conocida nos sea esta, tanta menor dificultad presentará la resolucion.

Para descubrir dichas relaciones no se pueden dar reglas infalibles, se necesita de una atenta consideracion al enunciado; sinembargo las preguntas siguientes serán indicios prácticos:

1ª Qué parte de la figura está conocida por las cantidades dadas? Aquí será muy útil considerar los vértices ú otros puntos notables, por ej., el punto medio de un lado dado &a.

2ª Qué parte tiene una relacion mas íntima con las dadas?

3ª Están ya las cantidades dadas unidas entre sí por la figura? y si no cómo se pueden poner naturalmente en relacion inmediata ó mediata? Aquí atiéndase dónde se trazan mas naturalmente las rectas auxiliares.

4ª Qué se sigue de la recta union de las cantidades dadas relativamente á la figura pedida?

5ª Qué parte ó punto se necesita mas particularmente para obtener la resolucion?

6ª Qué parte de las dadas no se ha aplicado hasta ahora? Pues si todas las dadas están aplicadas, es decir puestas en relacion entre sí y con la figura, se habrá obtenido generalmente la resolucion.

Nota. En la resolucion de los ejercicios prácticos conviene observar lo siguiente:

1º Tener tranquilo el ánimo,

2º Proceder natural y simplemente en la manera de considerar,

3º Encontrada la resolucion hacer una reflexion sobre ella, para saber la causa por qué fácilmente se ha encontrado, y mayor aun en el caso de que haya costado trabajo, pues esto servirá de mucho para saber elegir con acierto el verdadero camino.

ARTICULO I.

EJERCICIOS PRÁCTICOS RELATIVOS AL CAP. I Y II.

§ 40. PREGUNTAS QUE SE REFIEREN

a AL CAP. I.

1º Cómo se demuestra el 2º teor. por el teor. 1º cor.?

2º Cómo se demuestra el teor. 3º por supersicion de los ángulos α y α'?

3º Supuesto que en la fig. 18 $AB \ddagger CD$ y $EF \ddagger CD$, cómo se demuestra sin hacer construccion alguna que $AB \ddagger EF$?

4º Cómo se demuestra el segundo y tercer caso del teor. 12 haciendo abstraccion del ángulo $B'A'C'$.

5º Cómo se demuestra el teor. 14 trazando solamente CN?

6º Cómo se demuestra el teor. 15 prolongando dos lados opuestos hasta cortarse? y cómo si no pueden cortarse?

7º Cómo se demuestra el teor. 16 uniendo un punto interior con los vértices?

b. AL CAP. II.

8º Cómo se demuestra inmediatamente el cor. del teor. 1º por I 14?

9º Cuándo caerá la altura de un triángulo dentro ó fuera de él?

10º Por qué (en la fig. 28) son mayores las rectas que unen los puntos de CN con A que la AC, y por qué las que unen el punto A con los de BC son menores que AC?

11º Cómo se demuestra la parte 2ª del teor. 6 sin hacer construccion alguna solamente por la 1ª parte?

Resol. $a+b>c$ luego $a>c-b$
$a+c>b$ „ $a>b-c$
y así en adelante para b y c.

Por qué se necesitan estas dos espresiones para *a*?

12º Por qué vale el cor. 2 del teor. 6 (fig. 31) con mayor razon si el polígono que envuelve al otro es cóncavo?

13º Cómo se puede demostrar indirectamente el teor. 9?

Resol 1ª Póngase A'B' sobre AB de modo que caiga el tercer vértice del mismo lado por C. Sabiendo (por teor.?) que el triángulo ABC no puede envolver el otro.... Júntese C con C' y se obtendrá una contradiccion?

Resol. 2ª Sabiendo como en la primera, fórmense tres posiciones sin hacer ninguna otra construccion ni aplicacion de teorema alguno.

14º Cómo se demuestra inmediatamente el cor. del teor. 10 poniendo una hipotenusa sobre la otra?

Resol. La demostracion será indirecta aplicando II. 3 y I. 14 cor.

§ 41. TEOREMAS.

1° Las bisectrices de los ángulos suplementarios son perpendiculares entre sí.

Resol. I, 2.

2° Son perpendiculares entre sí las bisectrices de dos ángulos opuestos que se forman cortando dos paralelas por cualquiera recta.

Resol. I, 10.

3° En todo polígono convexo la suma de todos los ángulos externos correspondientemente formados es igual á 4R.

Resol. I. 2 y 16.

4° Prolongados todos los lados de un pentágono hasta cortarse, será la suma de todos los ángulos que así se forman, igual á 2R.

Resol. Dos de dichos ángulos estarán siempre con uno del pentágono en el mismo triángulo.

5° Un triángulo isósceles que tiene un ángulo igual á $\frac{2}{3}$ R, será equilateral.

6° Siendo en los lados del triángulo equilátero ABC las partes respectivas AD=BE=CD, será el triángulo DEF tambien equilátero.

Resol. Los otros tres triángulos parciales son congruentes entre sí (II, 7.)

7° Los triángulos equiláteros son congruentes si tienen igual altura.

8° Si se traza en un triángulo rectángulo la altura correspondiente á la hipotenusa, los triángulos parciales tendrán ángulos iguales á los del total.

9° En un triángulo isósceles son iguales las alturas laterales. (Donde se cortan dichas alturas?)

10° La paralela á la base trazada por el vértice de un triángulo isósceles es la bisectriz del ángulo exterior del vértice.

11° El teor. 10 vale recíprocamente de doble manera.

12° La altura lateral forma con la base de un triángulo isósceles un ángulo igual á la mitad del ángulo al vértice.

Resol. Trazada la bisectriz del ángulo al vértice, aplíquese el principio: si dos triángulos tienen iguales dos ángulos, el tercer ángulo del uno es igual al del otro.

13° Cada lado de un triángulo es menor que la mitad del perímetro.

Resol. Poniendo a=a y a$<$b+c se sigue que 2a &a.

14° Si se une un punto interior cualquiera de un triángulo con sus tres vértices, la suma de estas tres rectas siempre será mayor que el semiperímetro del triángulo.

10° El ángulo que forman entre sí la altura y la bisectriz del ángulo del mismo vértice es igual á la mitad de la diferencia de los otros dos ángulos.

Resol. 1ª (fig. 157) Haciendo AC=AC′ será $\gamma=\gamma'$ y $\sphericalangle$BAC′$=\beta-\gamma$

ademas $\sphericalangle$BAC′$+\delta=\frac{1}{2}\alpha+$EAD

ó $\sphericalangle$BAC′$=\frac{1}{2}\alpha-\delta+$EAD

pero $\frac{1}{2}\alpha-\delta=$EAD (hip.)

luego $\beta-\gamma=2$EAD

ó EAD$=\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$.

Resol. 2ª (por cálculo).

$\sphericalangle$DAE$=\frac{1}{2}\alpha-\delta$

ahora espresando α y δ por los otros dos ángulos del triángulo se tendrá el mismo resultado.

§ 42. PROBLEMAS.

1. *Construccion de los triángulos.*

Probl. 1—5. Construir un triángulo rectángulo si se han dado; 1° los dos catetos, 2° la hipotenusa y un cateto, 3° la hipotenusa y un ángulo agudo, 4° un cateto y el ángulo adyacente agudo, 5° un cateto y el ángulo opuesto.

Probl. 6 Construir un triángulo equilátero dado un lado.

Probl. 7—12 Construir un triángulo isósceles si se han dado.

7° la altura y la base, 8° la altura y el lado, 9° la altura y el ángulo del vértice, 10 la altura y el ángulo á la base, 11 la base y la altura lateral, 12 el lado y la altura lateral.

Probl. 13—49. Construir un triángulo cualquiera si se han dado.

13 a, b, γ	25 m, n, γ	37 $(\beta-\gamma)$, (m—n), b
14 a, α, γ	26 m, b, c	38 $(\beta-\gamma)$, b, c
15 b, c, β	27 m, c, h_a	39 $(\beta-\gamma)$, h_a, c
16 h_a, a, b	28 m, γ, h_a	40 (b+c), a, β
17 h_a, b, c	29 n, γ, h_a	41 (b+c), a, γ
18 h_a, γ, α	30 n, a, b	42 (b—c), a, β
19 h_a, a, γ	31 (m—n), b, c	43 (b—c), a, γ
20 h_a, b, β	32 (m—n), h_a, b	44 (b+c), a, α
21 h_a, b, α	33 (m—n) h_a, β	45 (b—c), a, α
22 m, n, h_a	34 (m—n) b, γ	46 (b+c), β, γ
23 m, n, b	35 (m—n) b, β	47 (b—c), β γ.
24 h_a, α, m	36 (m—n) γ, α	

48 (a+b+c), α, γ

49 (b+a—c) α, γ.

Resoluciones de algunos problemas.

Los problemas desde 1 hasta 30 no tienen grande dificultad, pues se pueden construir inmediatamente al ménos en parte; ademas recuérdense para los triángulos isósceles los teor. 13 y 14 del cap. II.

Pongamos dos ejemplos.

Probl. 5. Están dados a y $\sphericalangle\alpha$.

Análisis. Siendo CBA (fig. 159) el triángulo pedido se ve que están dados los puntos B y C y la direccion de BA, luego resta determinar el tercer punto A, lo que se obtendrá si se puede trazar por C una recta, de manera que $\sphericalangle CAB=\alpha$. El $\sphericalangle\alpha$ está dado luego poniendo en un punto cualquiera P de BA el ángulo $QPB=\alpha$. debe ser $CA \ddagger QP$ lo que se puede hacer segun el §. 8 probl. 3.

Constr. Formando un ángulo $MBN=R$ y tomando $BC=a$, pongo $\sphericalangle BPQ=\alpha$ despues por C la recta $CA\ddagger QP$ y será $\triangle ABC$ el pedido.

Dem. ABC es un triángulo rectángulo que tiene un cateto igual al lado dado a ademas $\sphericalangle CAB=QPB=\alpha$ por ser $QP\ddagger CA$

Probl. 27. Están dados c, m, h_a.

Análisis. Siendo ABC (fig. 160) el triángulo pedido se puede formar el triángulo rectángulo ADB, el punto C se encuentra prolongando BD hasta que sea $DC=m$.

Constr. Formado un ángulo recto NDM y tomado $AD=h_a$ describo desde A con c como radio un arco que corte DM en B, prolongado BD hasta C de manera que $DC=m$, ABC será el triángulo pedido.

Dem. h_a es la altura sobre CB, $AB=c$ y $DC=m$ (constr.)

Determ. 1º Se necesita que el arco descrito con c corte á DM luego debe ser $c<h_a$ ó $c=h_a$.

2º Siendo $c>h_a$ el arco cortará á DM en dos puntos B y B' luego el $\triangle AB'C$ tambien satisface á las cantidades dadas y por tanto son posibles dos triángulos distintos.

Nota. Las resoluciones de estos dos problemas son modelos segun los cuales se escribirán las soluciones completas de los otros. En adelante indicaremos generalmente las soluciones con pocas palabras que pueden servir para la solucion completa.

Resolucion general de los problemas 31—39.

La resolucion depende de la manera de representar las dos diferencias (m—n) y $(\beta-\gamma)$.

1º La representacion de (m—n) debe ser natural, á saber, de una manera que tenga relacion íntima con el triángulo pedido. Como el punto D (fig. 161) determina m y n, será natural si determina tambien (m—n), lo que se ha hecho haciendo $DE=n$ ó $DE'=m$, luego será $CE=BE'=(m-n)$. Esta representacion da al momento por consecuencia que $AE=AB$ y $AC=AE'$ (II, 14), de donde se sigue que podemos encontrar de otra manera los puntos E y E' describiendo desde el punto A con AB un arco que corte CB en E, y desde el mismo punto un arco con AC que corte CB en E'.

2º Por la misma construccion ya está determinada la diferencia $(\beta-\gamma)$ pues

$$\beta=\gamma+\sphericalangle CAE \text{ luego } CAE=\beta-\gamma$$

$$\beta=\gamma+\sphericalangle BAE' \;\;\text{,,}\;\; BAE'=\beta-\gamma.$$

Si se trata ahora de resolver el probl. 37 en el cual están

dados $(\beta-\gamma)$ (m—n), b; se ve que el $\triangle EAC$ puede construirse, de donde es facil determinar el punto D y por medio de este el punto B.

Resol. de los teoremas 40—47 que tienen mucha aplicacion en los siguientes.

Todo depende de representar diestramente la suma (a+b) y la diferencia (a—b), de manera que se tenga un triángulo formado por las cantidades dadas, que sirve para encontrar el triángulo pedido. Véase fig. 162.

Probl. 40. Dados (b+c), a, $\sphericalangle\beta$.

Para formar un triángulo con las cantidades dadas basta prolongar BA sobre A así que $AD=b$ y el $\triangle CBD$ es conocido. Ahora debemos encontrar el punto A, lo que es fácil si se atiende á que $\sphericalangle ADC=ACD$.

Probl. 41 se resuelve semejantemente al probl. 40.

Probl. 42 dados (b—c) a $\sphericalangle\beta$.

La diferencia (b—c) se forma naturalmente ó haciendo $AE'=c$ ó $AD'=b$; el primero no sirve al fin, pues así no está conocido el $\triangle BE'C$, luego tomaremos $AD'=b$ y por tanto conoceremos el $\triangle CD'B$ puesto que $\sphericalangle D'BC=2R-\beta$. El paso del triángulo CD'B al pedido es como ántes.

Probl. 43 *mas fácil.*

Probl. 44 dados (b+c) a, α.

Conocemos el $\triangle CBE$ pues $\sphericalangle BEC=\frac{1}{2}\alpha$

Probl. 45. dados (b—c), a, α.

Conocemos el $\triangle BE'C$ pues $\sphericalangle BE'C=R+\frac{1}{2}\alpha$.

Probl. 46 dados (b+c), β, γ, (luego tambien α).

Conocemos el $\triangle CEB$

Probl. 47 dados (b—c), β, γ.

Conocemos $\triangle CE'B$.

Probl. 48 y 49 se resuelve fácilmente si las espresiones (a+b+c) y (b+a—c) son formadas naturalmente.

* 2º VARIOS PROBLEMAS.

Probl. 50—53. Dado el ángulo MAN y un punto P en el lado AM encontrar en el otro lado un punto X, de manera que:

50 $PX=AX$, 51 $PX+AX=a$ (recta dada) 52 $PX-AX=d$ 53 $AX-PX=d$.

Probl. 50. El $\sphericalangle APX$ se puede encontrar fácilmente

Probl. 51. Siendo $AB=a$ en el lado AN se conoce $\sphericalangle BPX$

Probl. 53 la recta d se representa prolongando NA sobre A.

Probl. 54—55. Dada una recta AB y dos puntos P y Q fuera de esta y al mismo lado, hallar un punto X en la recta AB, de manera que 54 $PX=QX$ (II 14) 55 $\sphericalangle AXP=BXQ$.

Resol. para 55. Fórmese un punto P' que tenga al otro lado la misma posicion con AB que P.

*Muchas veces es menester construir la figura segun lo dicho en el problema.

Probl. 56—58. Dadoun triángulo ABC trazar $XY \mp AB$ de manera que 56 $XY=AX$ ($\triangle AXY$ será isósceles) 57 $XY=AX+BY$ 58 $XY=AX-BY$.

Resol. para 57. Siendo Z un punto de la recta XY de manera que $XZ=AX$ y $YZ=BY$ se tendrá &a.

Resol. para 58. Siendo Z un punto en la prolongacion de XY sobre Y de manera que $XZ=AX$ y $YZ=BY$ se tendrá &.

Probl. 59 Dado un triángulo ABC y en el lado AB un punto P encontrar en el otro lado AC un punto X de manera que $PX=BP+CX$.

Resol. Prolongando AC sobre C de manera que $CD=PB$, PXD será un triángulo isósceles &.

Probl. 60. Dado un ángulo A y un punto P en un lado encontrar en el mismo lado un punto Z, de manera que el punto Z tenga igual distancia de P y del otro lado.

Resol. Levantado en A una perpendicular al otro lado é igual á AP &a.

Probl. 61. Trazar entre dos puntos una recta que tenga igual distancia de estos.

Probl. 62. Siendo dadas tres rectas no paralelas encontrar en una de estas un punto que tenga igual distancia de las otras dos.

Resol. Siendo (fig. 163) n, m, p las rectas dadas, de las cuales p y n se corten en el punto B, aplíquese II, 15.

Probl. 63—64. Siendo las rectas AB y CD cuya interseccion sea inaccesible determinar:

63. En las rectas dos puntos que tengan igual distancia de la interseccion.

64 La bisectriz del ángulo que formen las dos rectas.

Probl. 65. Dividir una recta en dos partes iguales, de manera que la construccion se forme solo en un lado de la recta dada.

ARTICULO II.

EJERCICIOS PRÁCTICOS RELATIVOS AL CAPÍTULO III.

§ 43 PREGUNTAS.

1°. Por qué un cuadrilátero, que tiene tres ángulos rectos es un rectángulo?

2° De qué naturaleza es el triángulo AOB de teor. 7 fig. 52?

3° Cómo se demuestra el teor. 8 por II. 1 y 2. ?

4° Cómo se demuestra el teor. 9 por congruencia de los triángulos?

5° Si en un rombo un ángulo es igual á $\frac{2}{3}$ R, cuál es la longitud de la diagonal opuesta?

6° Qué parte es el triángulo DBE (teor. 12 fig. 54) respecto del total?—y por qué?

7° Cómo se puede demostrar el teor. 13 por el teor. 12 si en la fig. 55 se tira desde B á CD una paralela?

8° Por qué es un paralelógramo la figura que resulta de unir los puntos medios E, F, G, H de un cuadrilátero (fig. 164) y en qué relacion está su área con la del cuadrilátero?

9° Porque (fig. 164) siendo K é I los puntos medios de BD y AC pasará la recta IK por el punto O y por ello queda dividida en dos partes iguales?

Resol. EIGK un paralelógramo.

§ 44 TEOREMAS.

NOTA. Se llama centro de un paralelógramo el punto donde se cortan las diagonales.

1° La recta que pasa por el centro de un paralelógramo queda dividida en dos partes iguales por los lados opuestos y por el centro.

Resol. III, 4 y II, 8°

2° Si de los lados de un paralelógramo ABCD se toman las partes correspondientes $AM=BN=CP=DQ$, el cuadrilátero MNPQ será un paralelógramo.

Resol. III, 5. caso 3°.

Donde se halla el centro del nuevo paralelógramo?

Resol. Debe demostrarse que el centro está en la misma recta que las vértices opuestas del paralelógramo principal?

Qué figura resulta si en vez de un paralelógramo se tiene un cuadrado?

3° Uniendo los puntos medios de un rombo se tiene un rectángulo.

Resol. 1° por III. 8; 2° III, 6.

Qué figura resulta si en vez de un rombo se tiene un rectángulo y cuál si un cuadrado?

4° En el rombo las alturas son iguales.

Resol. Trazadas desde un mismo vértice las dos alturas &.

5° Si desde un punto cualquiera de la base de un triángulo isósceles se trazan dos rectas paralelas á los lados hasta que los corten, la suma de estas rectas será igual al lado del triángulo.

Resol. II, 4, y III, 3.

6° Si desde un punto cualquier de la base de un triángulo isósceles se bajan perpendiculares á cada lado, la suma de estas será igual á la altura lateral.

Resol. Para demostrarlo tírese desde dicho punto una paralela á uno de los lados.

7° Siendo ABC (fig. 165) un triángulo isósceles y $CD=AE$, la recta ED se halla dividida por la base en dos partes iguales, es decir, $EF=FD$.

Resol. Siendo $EG \mp DC$ se debe demostrar $\triangle FEG \cong FDC$.

8° Bajando desde un punto dentro de un triángulo equilátero los tres perpendiculares á los lados la suma de estas será igual á la altura del triangulo.

Resol. Puede reducirse al 6°.

9° La recta que une el punto medio de la hipotenusa con el vértice opuesto es igual á la mitad de esta.

Resol. III. 7.

10° Si en un triángulo rectángulo un cateto es igual á la mitad de la hipotenusa, el ángulo que se opone á dicho lado es igual á $\frac{1}{3}$ R.

11° Si la mediana en un triángulo es igual á la mitad de su lado correspondiente será el ángulo que se opone á dicho lado recto.

Resol. III 8 ó II 2 y I, 14.

12. Un trapecio cuyos lados no paralelos son iguales tiene las siguientes propiedades:

a los ángulos adyacentes á los lados paralelos son iguales.

b las diagonales son iguales.

c los cuatro puntos medios de los lados determinan un rombo.

d las dos rectas que unen dos puntos medios opuestos de dos en dos son perpendiculares y se dividen entre sí mutuamente en dos partes iguales.

e la recta que une los dos puntos medios de los lados paralelos es la altura del trapecio.

13° La suma de las diagonales en un cuadrilátero es mayor que el semiperímetro pero menor que todo él.

Resol. II. 6.

14° En un triángulo la semisuma de dos lados es mayor que la mediana del tercer lado.

Resol. Prolónguese la mediana otro tanto sobre la base &.

15° En un triángulo la suma de las tres medianas es menor que la de los tres lados.

Resol. por 14.

16.° Si en un triángulo la mediana es mayor que la mitad de su lado correspondiente, el ángulo que le es opuesto es menor que un recto, pero será mayor si la mediana es menor que la mitad del lado correspondiente.

Resol. por 11 y II. 6 cor. 1 nota.

17.° La recta que une en un trapecio los puntos medios de las diagonales es paralela á los lados paralelos y ademas la mitad de la diferencia de estos.

§ 45 PROBLEMAS.

Probl. 1.°—4.° Construir un cuadrado.

1.° dado el perímetro 2° la diagonal 3° la suma de la diagonal y el lado 4° la diferencia entre la diagonal y el lado.

Probl. 5°—15° Construir un rombo si se conocen:

5° el lado y una diagonal. 6° dos diagonales, 7° una diagonal y el ángulo opuesto, 8° el lado y la altura, 9° una diagonal y la altura, 10° una diagonal y el ángulo por qué pasa, 11° el lado y la suma de las diagonales, 12° el lado y la diferencia de las diagonoles, 13° un ángulo y la suma de las diagonales, 14° un ángulo y la diferencia de las diagonales, 15° un ángulo y la suma del lado y de una diagonal.

Probl. 16°—22° Construir un rectángulo si se conocen:

16° un lado y la diagonal; 17° un lado y el ángulo que forman las diagonales; 18° un lado y la suma de la diagonal y de otro lado; 19° un lado y la diferencia entre la diagonal y otro lado; 20° la diagonal y la suma de los dos lados adyacentes 21° la diagonal y la diferencia de los dos lados adyacentes.

22.° La suma de las diagonales y de los lados, ademas el ángulo que forman las diagonales.

Probl. 23°—35° Construir un paralelógramo si se conocen:

23° Un lado y las dos diagonales 24° un lado y los ángulos que se forman por dicho lado y las diagonales, 25° un lado, un ángulo y una diagonal, 26° un lado, su altura y un ángulo, 27° un lado su altura y una diagonal, 28° un lado, la altura del lado adyacente y una diagonal, 29.° dos lados y una altura, 30.° dos lados y una diagonal, 31.° las dos diagonales y una altura, 32.° una diagonal una altura y un ángulo, 33.° las dos diagonales y el ángulo que forman entre sí, **34.°** las dos alturas y un lado, 35.° las dos alturas y un ángulo.

Nota.—Para resolver dichos problemas se necesita saber bien;

1.° Las propiedades elementales de los paralelógramos.

2.° Que la altura de un paralelógramo siempre determine la posicion de dos lados opuestos.

3.° la resolucion de los problemas 40—48 en Art. I.

4.° Que dada una recta ó la suma de dos rectas se conoce la mitad.

Resolucion de 9, que sirve de norma.

Anal. Siendo (fig. 166) AEBD *el* rombo pedido, conocemos:

1° la posicion de dos lados paralelos, que se determinan por h=PM.

2.° la posicion de AB relativa á los peralelos y por tanto los dos puntos A y B.

3.° ademas sabemos que las diagonales son perpendiculares entre sí (III.9); de donde se determinarán los otros dos puntos D y E.

Constr. Siendo PM la altura dada, tiro en los dos puntos extremos dos perpendiculares PQ y MN, desde un punto cualquier A de MN describo un arco con la diagonal como radio que corte la otra paralela en el punto B, en el punto medio C de AB levanto una perpendicular que corte las dos paralelas en D y E; uniendo A con D y E con B será AEBD el rombo pedido.

Dem. DB $\ddagger$ AE (I, 9 cor. 2) luego $\sphericalangle$CAE=CBD de donde $\triangle$ACE$\cong$BCD (II, 8) luego BD=AE y por tanto BDAE un paralelógramo (III, 5 caso 2°) que tiene la altura dada PM (constr.); ademas DB=DA por ser CC=AC y DC $\perp$ AB (cuostr) luego BDAE un rombo que tiene la altura dada y ademas por

diagonal la recta dada AB.
Resol. de 22 por 48 del § 42.

Probl. 36—77. Construir un trapecio (fig.167) si se conocen:

36 a, b, α, β	57 a, e, f, $\sphericalangle$ef
37 a, b, β, δ	58 b, e, f, $\sphericalangle$ef
38 a, c, α, β	59 d, e, f, $\sphericalangle$ef
39 a, b, c. β	60 e, f, α, $\sphericalangle$ef
40 a, b, c, α	61 e, f, β, $\sphericalangle$ef
41 a, b, d, β	62 e, f, $\sphericalangle$ef, $\sphericalangle$be
42 a, d, e, β	63 e, f, $\sphericalangle$ef, $\sphericalangle$de
43 a, c, e, α	64 e, f, $\sphericalangle$ef, $\sphericalangle$df
44 a, b, c, h	65 (a+c), d, α, β
45 a, c, e, h	66 (a+c,) b, d, α
46 a, e $\sphericalangle$ae $\sphericalangle$de	67, (a+c), e, f, d
47 b, d $\sphericalangle$bf $\sphericalangle$df	68 (a—c), e, α, β.
48 a, b, c, $\sphericalangle$af	69 (a—c), b, d, e
49 b, d, β, $\sphericalangle$ae	70 (a+b), c, d, e
50 b, d, α, $\sphericalangle$be	71 (a—b) c, d, e
51 b, d, α, $\sphericalangle$bf	72 (a+b) c, d, α
52 a, b, c. e	73 (a+b), e, d, β.
53 a, b, d, e	74 (a—b), c, d, α.
54 a, c, e, f	75 (a+b), e, f, β
55 a, c, e, $\sphericalangle$ae	76 (a—b), e, f, β
56 a, c, e, $\sphericalangle$ef	77 (a—b), c, d, β

Advertencia para resolver los probl. 36—77.

1ª Trazada de C una paralela á DA se tendrá un triángulo cuyos lados son b, d (a—c) y cuyos ángulos β, α.

2ª Trazada de C una paralela a DB se tendrá un triángulo que tiene los lados (a+c), e y f ademas $\sphericalangle$ef &.

3ª h determina la posicion de los lados paralelos.

4ª $\frac{1}{2}$ (a+c) se representa uniendo los puntos medios de los lados no paralelos

5ª con las cantidades dadas muchas veces se puede construir un triángulo, que sirve para resolver el problema propuesto.

Probl. 78—97. Construir un cuadrilátero (fig. 168) si se conocen:

78 a, b, c, d, α	88 a, b, f, α, β
79 a, b, c, β, γ	89 a, b, f, β, γ
80 a, c, d, α, β	90 a, b, e, f, α
81 a, b, α, β, γ	91 a, c, e, f, α
82 a, c, α, β, γ	92 a, e, α, δ, γ
83 a, b, c, d, e	93 a, f, α, δ, γ
84 a, b, c, e, f,	94 a, e, f, α, β
85 a, b, d, e, α	96 a, b, e, f, $\sphericalangle$ef.
86 a, b, c, e, δ	96 a, b, c, e, $\sphericalangle$ef
87 a, b, e, α, δ	97 b, d, e, f, $\sphericalangle$ef

Resol. de 97 (fig. 164) se conoce el paralelógramo EFGH ademas KG=$\frac{1}{2}$b y KE=$\frac{1}{2}$d luego el punto K &.

Advertencia. En la (fig. 169 t_a. t_b t_c denotan las medianas á los lados respectivos, q_a q_b q_c las bisectrices de los ángulos respectivos α, β, γ.

Probl. 98—133 Construir un triángulo si se conocen:

98 h_b, h_c, α	110 c, α, t_c	122 h_c, t_a, t_b
99 h_b, h_c, b	111 a, h_a, t_a	123 t_a, b, $\sphericalangle t_a$ c
100 h_b, h_c, (c+b)	112 a, h_c, t_a	124 t_a, $\sphericalangle t_a$c $\sphericalangle t_a$ b
101 h_b, h_c, (c—b)	113 b, h_a, t_a	125 c, α, q_a
102 c, b, (h_b+h_c)	114 a, h_a, t_c	125 c, α, q_b
103 c, b, (h_b—h_c)	115 a, h_b, t_c	127 β, γ, q_a
104 β, γ, (h_b+h_c)	116 α, h_c, t_c	128 a, h_c, q_c
105 β, γ, (h_b—h_c)	117 α, h_b, t_a	129 a, h_b, q_c
106 b, c, t_a	118 a, t_a, t_c	130 h_c, q_c, γ
107 b, c, t_b	119 b, t_a, t_c	131 h_c, q_c, α
108 α, b, t_a	120 t_a, t_b, t_c	132 h_c, q_b, β
109 α, t_a, $\sphericalangle t_a$ c	121 h_a, t_a, t_b	133 α, h_b, t_c

Resol. para 98 y 99. Se sabe que un vértice de un triángulo, está situado en una paralela á la base que dista á esta de la altura.

Resol. para 100—105. Aunque son bastantemente difíciles damos para resolverlos solo una advertencia: (c+b) y (h_b+h_c) determinan un triángulo rectángulo con el ángulo agudo α ó (2R—α), lo mismo hacen (c—b) y (h_b—h_c).

Resol. para 106, b, c y 2 t_a forman un triángulo que sirve &a.

Resol. para 111. Formado por t_a y h_a un triángulo rectángulo recuérdese el sentido de t_a.

Resol. para 114. t_c y una cierta parte de h_a forman un triángulo rectángulo &a.

Resol. para 115. Aplíquese lo que se ha dicho para 114 y 98.

Resol. para 117. Atiéndase bien en qué paralela está situado el punto donde t_a corta al lado a.

Resol. para 118—122. Cuál es la propiedad del punto de interseccion de las medianas?

Resol. para 123 y 124. Se resuelven de una manera semejante al 106.

VARIOS PROBLEMAS.

Probl. 134—136. (fig. 170). Dadas dos paralelas y un punto P fuera ó dentro de estas, trazar por P una recta, de manera que 134 XY=m, 135 PX+PY=n, 136 PY—PX=m.

Probl. 137—140. (fig.170). Siendo ademas dados dos puntos A y B en dichas paralelas trazar por P una recta sin cortar A B de modo que 137 A=XBY 138 AX=2BY 139 AX+BY=m 140 BY—AX=n.

Probl. 141—144. Los mismos problemas de manera que dicha recta corte á AB.

Probl. 145. Construir un cuadrado en un triángulo rectángulo, de manera que tenga un ángulo recto comun con el triángulo, y el vértice opuesto esté en la hipotenusa.

Probl. 146. Dados los tres puntos medios de los lados de un triángulo formar dicho triángulo.

Probl. 147. Construir un pentágono dados los cinco puntos medios de los lados.

Resol. Aplicando el § 43, 8 se puede determinar fácilmente un punto medio de una diagonal, y por III, 12, se tendrán ya tres vértices del pentágono.

Probl. 148—150. Por el vértice C de un triángulo ABC trazar una recta, de modo que siendo X é Y los pies de las perpendiculares á dicha recta desde A y B, que sea 148 AX=BY, 149 AX=2BY, 150 CX=CY.

Resol. 149. La recta de B paralela á XY divide CA en partes iguales. 150 se resuelve por III, 13 cor.

Probl. 151. Dadas dos secantes encontrar un punto que tenga la distancia a de una y la b de otra.

Resol. Pueden trazarse dos paralelas que tengan las respectivas distancias &a.

ARTICULO III.

EJERCICIOS PRÁCTICOS RELATIVOS AL CAP. IV.

§ 46. PREGUNTAS.

1) Por qué se añade en el teor. 5° "si el arco es menor que la semicircunferencia" é igualmente en el teor. 6° "si el ángulo es menor que dos rectos"?

2) Cómo se demuestra el teor. 7° por medio de la congruencia de los triángulos?

3) Qué cuerda es la máxima y cuál la mínima de todas las que se pueden trazar por un punto dentro de una circunferencia?

4) Cómo se demuestra el teor. recíproco de 19

5) Cómo se demuestra el teor. recíproco de 20.

§ 47 LUGARES GEOMÉTRICOS.

Se llama lugar geométrico de un punto una serie de puntos que tienen una ó muchas propiedades comunes; por ej. todos los puntos de una circunferencia tienen comun la propiedad que equidisten de un punto fijo, lo que se enuncia: "El lugar geométrico de un punto, que tiene una distancia constante á un punto fijo, es la circunferencia cuyo centro es el punto fijo y el radio la distancia dada".

Aunque con otras palabras ya de algunos se ha tratado en los primeros cuatro capítulos, sinembargo aquí los presentaremos bajo otra forma pues es de mucha importancia conocerlos para la solucion de los problemas gráficos.

1. El lugar geométrico de un punto, que equidista de dos puntos dados es la perpendicular á la recta que los une y pasa por su punto medio (II, 14).

2. El lugar geométrico de un punto de dos rectas dadas es la bisectriz del ángulo que forman entre sí (II, 15).

3. El lugar geométrico de un punto que tiene igual distancia de una recta es la paralela á esta en la distancia dada. (III, 3, cor).

Nota. Cuál es el lugar geométrico de un punto que tiene igual distancia de dos rectas paralelas.

4. El lugar geométrico del vértice de un triángulo rectángulo es la circunferencia cuyo diámetro es la hipotenusa del triángulo. (IV, 19).

5. El lugar geométrico de los vértices de un triángulo del cual se conocen la base y el ángulo del vértice es un arco descrito sobre la base como cuerda y que es capaz del ángulo dado. (IV,18 cor. y § 18 probl. 7).

6. El lugar geométrico del centro de todos los círculos que pasan por dos puntos estremos de una recta dada, es la perpendicular á esta en su punto medio (IV 8, cor. 1).

7. El lugar geométrico del centro de todas las circunferencias, que tocan una recta M en el punto P es la perpendicular á M en el punto P (IV, 17).

8. El lugar geométrico del centro de todas las circunferencias tangentes á una dada en un punto P es el diámetro de la dada que en su prolongacion pasa por el punto P (IV, 27 y 28)

Ejercicios.

Encontrar el lugar geométrico del centro de todas las circunferencias, cuyos radios tienen una longitud dada y ademas que:

1° pasen por un punto dado. (Circunferencia).

2° toquen una recta dada. (Recta).

3° toquen un círculo dado exteriormente. (Circunferencia concéntrica).

4° toquen un círculo dado interiormente.

5° separen de una recta dada segun su posicion una cuerda=m. (Recta paralela).

6° formen con una recta un ángulo dado.

7.° dividan una circunferencia dada en partes iguales. (Círculo concéntrico).

8° corten á una circunferencia dada de manera que la cuerda comun sea igual á una recta dada. (Círculo concéntrico).

9° formen con un círculo dado un ángulo dado. (Circunferencia concéntrica).

Resol. de 6° (fig. 171).

Advertencia. El ángulo que forma entre sí una recta y una circunferencia es el que forma entre sí la recta y la tangente en el punto comun; y por tanto el ángulo determinado por dos círculos se forma por las dos tangentes en el punto comun.

Constr. Siendo MN la recta póngase el ángulo dado en un punto cualquier A de MN, tírese AC ⊥ AB y haciendo AO igual al radio dado descríbase con OA una circunferencia que por consiguiente tiene las propiedades pedidas, pues AB es tangente á esta.

Haciendo lo mismo para un otro punto A′ se ve que el centro del segundo círculo O′ tiene la misma distancia de MN que O por ser △AOD≅A′O′D′ (II. 8), por tanto se puede decir que sea la recta PQ trazada en la distancia OD de MN paralelamente á MN el lugar geométrico pedido.

Demos. Supuesto el primer círculo se necesita demostrar que toda circunferencia cuyo radio es igual á OA y cuyo centro está en la recta PQ forma el mismo ángulo con la recta dada. Para eso describiremos la circunferencia desde el centro O′ con el radio OA, ademas sea A′B′ la tangente luego será

△AOD≅A′O′D′ (II, 10, cor).

luego ∢DAO=∢D′A′O′

ademas es ∢OAB=∢O′A′B′=R

luego ∢ α $=\alpha'$

NOTA. Combinando dichos lugares geométricos de dos en dos y cado uno consigo mismo se tendrán 45 problemas determinados; por ej. encontrar el centro de un círculo de radio r, que determine dos rectas secantes dos cuerdas, una igual á b y otra á c.

§ 48. TEOREMAS.

1° Si dos cuerdas se cortan dentro de un círculo, el ángulo que forman será igual á un inscrito sobre la suma de los arcos comprendidos por los lados del primero.

Resol. Trazada por el punto estremo de una cuerda una paralela á otra, aplíquese IV, 9.

2° Si dos cuerdas prolongadas se cortan fuera de un círculo, será igual el ángulo que forman á un inscrito sobre la diferencia de los arcos comprendidos entre los lados del primero.

3° La suma de dos lados opuestos de un cuadrilátero circunscrito á una circunferencia (es decir cuyos lados todos son tangentes á ella) es igual á la de los otros dos.

Resol. IV 22.

4° El teor. 3° vale inversamente, cuya demostracion será indirecta aplicando II, 6.

5° Bajando desde los puntos extremos de un diámetro dos perpendiculares á una cuerda ó su prolongacion serán iguales los segmentos estremos de la cuerda.

Resol. III, 13 y IV, 7.

6° Levantando en los puntos estremos de una cuerda perpendiculares hasta que corten un diámetro serán iguales los segmentos estremos de este. Resol. como en 5°

7° Son iguales las perpendiculares levantadas en dos puntos de una cuerda que equidistan de la circunferencia.

Resol. Unido el centro con los puntos estremos de las perpendiculares aplíquese II, 2 y 10.

8° Es imposible que dos circunferencias sean bisectrices entre sí.

9° Si se trazan desde el punto, en donde se corten dos circunferencias los dos diámetros respectivos, están en línea recta el segundo punto de interseccion de ellas con los otros dos puntos de los diámetros.

Resol. IV. 19; otro III. 12 y IV 25.

10° (fig. 172). Si sobre AB, cuerda comun de dos circunferencias iguales, se describe una circunferencia que tenga por diámetro dicha cuerda; toda recta trazada desde A y que corte las dos primeras circunferencias quedará dividida en partes iguales por la tercera.

Demos. 1ª analítica que sirve para encontrar la sintética.

Será FD=ED si FB=EB por ser ∢EDB=R (IV. 19).

„ FB=EB si ∢BEF=BFE

„ ∢BEF=BFE si arc. ANB=arc. AMB.

lo que es por ser los dos círculos iguales y AB la cuerda comun.

Demos. 2ª sintética.

Siendo los dos círculos iguales y AB la cuerda comun será

arc. ANB=arc. AMB (IV, 4 cor).

luego ∢BEF=∢BFE (IV. 18).

„ BE=BF

ademas ∢BDE=R (IV, 19).

luego DE=FD (II, 13).

11° Una circunferencia, que toca á otra interiormente y pasa por el centro de esta, dividirá en dos partes iguales á toda cuerda de la segunda, que pasa por el punto de contacto.

Resol. IV 19 y II 13.

12° El diámetro de un círculo inscrito á un triángulo rectángulo es igual á la diferencia entre la suma de los catetos y la hipotenusa.

Resol. Trazados los tres radios ó los puntos de contacto aplíquese VI, 22.

13° Todas las tangentes desde una circunferencia á otra concéntrica interior son iguales. (Lugar geométrico).

14° Todas las cuerdas de un círculo, que son juntamente tangentes á una circunferencia interior y concénrica son iguales. (Lugar geométrieo).

§ 49. PROBLEMAS.

NOTA El análisis del problema siguiente sirva de modelo para encontrar la solucion de otros problemas.

Probl. (fig. 173) Dados dos círculos secantes trazar por el punto de interseccion una recta, de manera que el segmento interceptado por las dos circunferencias sea igual á una recta dada.

Análisis 1ª (algo difusa).

Siendo BC la recta pedida se necesita averiguar qué relacion hay entre esta y los centros. Segun la suposicion la parte AB es una cuerda de una circunferencia, lo mismo que la parte AC de la otra; ahora bien, sabemos que los puntos medios de las cuerdas tienen una relacion especial con el centro, puesto que el radio perpendicular á una cuerda pasará por el punto medio de ella; por consiguiente se puede unir dichos puntos D y E con los centros; de donde está conocida la recta $DE = \frac{1}{2}BC$ y es ya en relacion mediata con los centros. Claro es que debemos unir mas; y cómo? Las rectas OD y O′E son paralelas, pues son perpendiculares á la misma recta, luego trazando por O la recta OF paralelamente á DE será OF=DE. Con lo hecho hemos tenido un triángulo rectángulo OFO′ del cual conocemos la hipotenusa OO′ un cateto OF, luego se puede construir sobre OO′ el triángulo OFO′ y de aquí trazar por A la recta CB paralelamente con OF.

Análisis 2ª (mas en forma).

Siendo BC la recta pedida, bájese de O y O′ perpendiculares á BC con lo cual queda conocida DE, ademas trazada OF ‡ DE se puede construir el $\triangle$OFO′ y de aquí la recta pedida.

Determ. Para poder construir el $\triangle$OFO′ se necesita que

$OF \leqq OO'$ ó $\frac{1}{2} BC \leqq OO'$.

1º *Construccion de triángulos.*

Probl. 1º—5º construir un triángulo rectángulo si se conocen.

1º la hipotenusa y la altura, 2º los dos segmentos de la hipotenusa.

3º la hipotenusa y la suma de la altura y de un segmento de la hipotenusa.

4º la hipotenusa y la diferencia entre la altura y un segmento de la hipotenusa.

5º el perímetro y la altura.

Resol. de 1—4º por IV. 19, de 5º por § 18 probl. 7

Probl. 6º—8º Inscribir en una circunferencia dada un triángulo del cual se conoce.

6º la base, 7º el ángulo del vértice, 8º la altura.

Probl. 9º—24º Inscribir en una circunferencia un triángulo, si se conocen:

9 b, c	13 α, t_a	17 β, γ	21 a, $(\beta-\gamma$
10 a, h_a	14 a, γ	18 α, h_b	22 h_a,$(\beta-\gamma$
11 a, t_a	15 b, h_a	19 α, t_b	23 h_a,(m—n
12 α h_a	16 b, t_a	20 a, h_c	

24 Los dos segmentos en los cuales se halla dividida la base por la bisectriz del ángulo opuesto.

Resol. Si se conoce un ángulo, se conocerá el lado opuesto y viceversa.

Resol. para 16. El punto en donde cortará la mediana t_a al lado a, está situado en la circunferencia sobre el radio como diámetro.

Resol. de 21. (fig. 161). Sabiendo que $\sphericalangle CAE = \beta - \gamma$, prolónguese AE hasta cortar la circunferencia y véase si la parte CE esté determinada.

Resol. de 22 y 23. (fig. 161). Está conocido el $\triangle$CAE.

Resol. de 24. Donde cortará la bisectriz prolongada á la circunferencia.

Advertencia: r denota el radio de la circunferencia circunscribta y ρ el de la inscrita.

Probl. 25—44. construir un triángulo si se conocen.

25 a, α, t_a	32 a, h_b, h_c	39 ρ, h_a, b
26 m, n, α	33 t_a, h_b, h_c	40 ,, h_a, α
27 h_a, (m-n),$(\beta-\alpha)$	34 r, h_a, t_a	41 ,, h_a, β
28 a, $\sphericalangle t_a b$, $\sphericalangle t_a c$	35 α, t_b, t_c	42 ,, q_a, $(\beta-\gamma)$
29 t_a, β, b	36 ρ, γ, β	43 ,, h_a, $(\beta-\gamma)$
30 (a+b+c), α, h_a	37 ,, a, β	44_a ,, h_a, q_a
31 t_a, α, b	38 ,, α, q_a	

Resol. En los 25—31 atiéndase al lugar geométrico 5º ademas para 29 al probl. 16 y § 12 IV demost.

Resol. de 33 Se puede construir un triángulo por t_a y $\frac{1}{2}$ h_b y un otro por t_a y $\frac{1}{2}$ h_c.

Resol. de 34. Se puede construir un triángulo por t_a y h_a de donde es fácil encontrar el centro de r.

Resol. para 40. Construido el $\sphericalangle\alpha$ y el círculo inscrito se conoce la posicion de q_a y por construccion de un triángulo la de h_a.

Resol. para 42, 43, 44 (fig. 157) se conoce el $\triangle$DAE y por tanto el centro de ρ.

2.º *Construccion de cuadriláteros.*

Probl. 44—52. Construir un cuadrilátero.

44 a, d, α, γ, e	48 f, α, γ, a, c
45 a, d, α, c$\sphericalangle$ec	49 e, f, $\sphericalangle$ef, a, γ
46 a, d, α, $\sphericalangle$ec$\sphericalangle$eb	50 e, f, $\sphericalangle$ef, α, γ,
47 f, α, γ, a, $\sphericalangle$fe	51 e, f, $\sphericalangle$ef, α, β
48_a f, α, γ, a, b,	52 a, α, γ, $\sphericalangle$af $\sphericalangle$bf

Resol. de 51 y 52 fig. 164. Se pueden determinar los puntos I y K.

Probl. 53—56 Inscribir en un círculo dado un cuadrilátero si se conocen.

53 $\sphericalangle$ac, $\sphericalangle$ed, $\sphericalangle$eb	55 $\sphericalangle$ef, $\sphericalangle$ac $\sphericalangle$be
54 a, $\sphericalangle$ce, $\sphericalangle$cf	56 e, f, $\sphericalangle$ef

Resol. de 56. Puesta f como cuerda en la circunferencia tírese una recta que forme con f el $\sphericalangle$ef y bajando á esta una perpendicular desde el centro aplíquese IV, 7.

Probl. 57—60. Circunscribir á un círculo dado un cuadrilátero si se conocen.

57 α, β. γ	59 a, α, β
58 a, β, e	60 α, β, $\sphericalangle$eb

Probl. 61. Circunscribir á un círculo dado un trapecio dados dos lados no paralelos.

Resol. El centro está en cierta relacion con los lados no paralelos.

Probl. 62. Circunscribir á un círculo dado un rombo dado el lado.

Resol. Se conoce la altura del rombo pedido.

Probl. 63—66 Construir un cuadrilátero de suerte que se pueda circunscribir á este una circunferencia si se conocen.

63 a, b, c, α	65 e, f $\sphericalangle$ef, $\sphericalangle$df
64 a, b, c, β	66 e, α, β, δ

Resol. de 65 (fig. 164). Se conoce el paralelógramo EFGH ademas CB y AD segun su posicion por ser conocido los ángulos EHA y EFB.

Probl. 67—69 construir un cuadrilátero con tal que se pueda inscribir á este un círculo si se conocen:

67 a, b, α, β, 68 a, α, β; γ 69 a, b, c. α.

3° *Construccion de círculos.*

Probl. 70—74. Construir una circunferencia.

70 que pase por un punto dado y toque á una recta en punto dado.

71 que pase por un punto y toque á una circunferencia en punto dado.

72 que toque á dos rectas y á una en punto dado.

73 que toque á una circunferencia en un punto dado y ademas á una recta.

74 que toque dos circunferencias de las cuales á una en punto dado P.

Resol. 74 por § 42 probl 42.

4° VARIOS PROBLEMAS.

Probl. 75—78. Trazar una recta por el vértice C de un triángulo ACB sin cortar el triángulo, de modo que bajando á la recta desde A y B perpendiculares cuyos pies sean X é Y, tenga lugar:

75 AX—BY=m   76 AX+BY=n

77 CX+CY=m′   78 CX—CY=n′

Resol. Aplíquese IV, 19 ademas se puede representar por medio de III, 13 en 76 $\frac{AX+BY}{2}$ y en 78 $\frac{CX-CY}{2}$.

Probl. 79—82. Son los mismos problemas con tal que la recta corte al triángulo.

Resol. Se pueden reducir á los precedentes, pero se resuelven tambien directamente escepto 81.

Probl. 83. En un círculo dado formar una cuerda igual á una recta dada y paralela á otra.

Resol. IV, 7

Probl. 84—86. Dado un círculo y un punto P dentro de él trazar por P una cuerda XY de manera que:

84 PX=PY, 85 XY=m, 86 PX—PY=n

Resol. de 86 $\frac{1}{2}$(PX—PY) es un lado de un triángulo que se puede construir.

Probl. 87—89. Siendo dicho punto fuera del círculo trazar por P la cuerda XY de manera que:

87 XY=m, 88 PX=XY, 89 PX+PY=n.

Resol. de 88. Atiéndase que un radio es la mediana en un cierto triángulo.

Probl. 90—91. Trazar por dos puntos dados de una circunferencia dos cuerdas paralelas, de manera que: 90 la suma de estas sea igual á una recta dada, 91 la diferencia tenga una longitud dada.

Resol. Deben reducirse á 76 y 75.

Probl. 92. Construir en un círculo una cuerda que sea paralela á una recta y esté dividida en dos partes iguales por otra dada.

Probl. 93—96 Entre una recta y circunferencia dada trazar una recta igual á otra dada, de manera

93 que sea paralela á otra dada. (Dos soluciones).

94 que toque a la circunferencia dada (Cuatro soluciones).

95 que corte á la circunferencia dada bajo un ángulo dado (Cuatro soluciones).

96 que forme una cuerda =m en la circunferencia dada (Cuatro soluciones).

Resol. de 95 y 96. Atiéndase á los lugares geométricos.

Probl. 97. En un círculo dado construir un triángulo cuyos lados sean paralelos á tres rectas dadas.

Resol. Se puede fácilmente determinar un lado, pues se conoce el ángulo opuesto, y por tanto el teorema está reducido al 93.

Probl. 98. En un círculo dado construir un triángulo cuyos dos lados sean paralelas á dos rectas dadas y el tercero pase por un punto dado.

Resol. Es de una manera semejante como 97, ademas aplíquese el probl. 85.

Probl. 99. Dados tres puntos A, B y C encontrar un cuarto punto X, de manera que $\sphericalangle AXB=\alpha$ y $AXC=\gamma$ (α y γ son ángulos dados.)

Probl. 100—102. Dados dos círculos trazar una recta, de manera que

100 toque á las dos circunferencias (4 soluc.),

101 toque á una y corte á la otra bajo un ángulo dado (4 soluc.)

102 toque á una y forme una cuerda dada con la otra (4 soluc.)

Resol. de 100 suponiendo que estén los círculos en el mismo lado de la tangente pedida. Trazados los radios desde los centros á los puntos de contacto, se tendrá un trapecio que se construye fácilmente por medio de un triángulo, cuya hipotenusa es la central y un cateto la diferencia de los radios.

Nota. De dicha manera se tendrán dos soluciones, y formando un triángulo cuya hipotenusa sea la central y uno de los catetos la suma de los radios, se tendrán otras dos soluciones.

Resol. de 101 y 102. Se puede determinar la distancia de la recta pedida al centro de la circunferencia secante, y por tanto los problemas se han reducidos al 100.

Probl. 103. Dadas dos circunferencias encontrar un punto en una de estas, de manera que las tangentes trazadas de este punto á la otra circunferencia sean perpendiculares entre sí.

Resol. Se puede encontrar fácilmente el lugar geométrico de dicho punto.

Probl. 104. Dado un sector de un círculo describir una circunferencia que toque los radios y el arco de este.

Probl. 105. Dados tres puntos como centros, describir al rededor de estos tres circunferencias que se toquen de dos en dos.

Resol. III, 22 y 27. Aplicando III, 28 se tendrán ademas 3 soluciones.

Probl. 106. Dentro de un triángulo equilátero describir tres circunferencias que se toquen de dos en dos y ademas cada una á dos lados del triángulo dado.í

Probl. 107. Dados tres crculos iguales encontrar un punto de manera que las tangentes trazadas desde este punto á las circunferencias sean iguales.

Probl. 108. Dados dos círculos iguales y secantes inscribir en la parte comun un cuadrado cuyos vértices estén en los arcos.

Probl. 109—110. Dado un triángulo equilateral: al rededor de este escribir otro equilateral 109 que tenga un lado dado, 110 que forme con los lados del primero un ángulo dado.

Resol. § 41. teor. 6 y § 18 probl. 7.

Probl. 111—112. Dado un cuadrado al rededor de este escribir otro: 111 que tenga un lado dado, 112 que forme con los lados del primero un ángulo dado.

Resol. § 44 teor. 2.

ARTICULO IV.

EJERCICIOS PRÁCTICOS RELATIVOS AL CAPÍTULO V.

§ 50 PREGUNTAS.

1) Cómo se demuestran geométricamente las fórmulas algébricas:

$$1^{\circ}\ (a+b)^2+(a-b)^2=2(a^2+b^2)$$
$$2^{\circ}\ (a+b)^2-(a-b)^2=4ab$$

2ª Cómo se puede la demostracion del teor. 9. (fig. 101) reducir al teor. 6?

Resol. Tírese por G é J dos paralelas á AE &.

3ª Por qué es (en fig. 103a) $CD \perp HB$ y $CE \perp GA$?

Resol. por (I. 15).

4ª Por qué (fig. 103a) se encuentran en un mismo punto las rectas HI, LC y GF?

Resol. Prolongadas HJ y GF hasta cortarse y unido el punto de interseccion con C, se demuestra que esta línea está en la misma recta que LC.

5ª Por qué (en fig. 103b) se encuentran en un mismo punto las rectas CL, AG y BH?

Resol. Se puede reducir al § 12, III, aplicando 3ª y 4ª

6ª Cómo la construccion en (fig. 103_b) sirve de otras dos demostraciones del teor. de Pitágoras?

Dem. 1º Unido H con C y prolongado hasta cortar AB se puede fácilmente ver que el paralelógramo CK que resultará es igual á AC^2 y á una parte de AB^2, ademas que el paralelógramo CL es igual á AB^2 y á otra parte de CB^2.

Dem. 2ª Quitando las partes, comunes se debe demostrar la igualdad de las restas, reduciendo al Rect. CH.

§ 51 LUGARES GEOMÉTRICOS.

1º El lugar geométrico del vértice de un triángulo del cual se conocen la base y el área son dos paralelas de igual distancia de la base (V. 7. cor. 2).

2º El lugar geométrico de la base superior de un paralelógramo del cual se conocen la base y el area es una recta paralela á la base (V. 6)·

3º El lugar geométrico del vértice de un triángulo, cuya suma de los cuadrados de los lados es igual al cuadrado de la base dada, es una circunferencia cuyo diámetro es la base. (V 12 y IV 10).

4º El lugar geométrico del vértice de un triángulo, cuya diferencia de los cuadrados de los lados es igual al cuadrado de la base dada es una perpendicular en el punto extremo de la base.

§ 52 TEOREMAS.

1º Si se une un punto P situado en el plano de un paralelógramo con los vértices de este, será la suma ó la diferencia de los dos triángulos, que tienen por vértice el punto P y por bases los lados opuestos del paralelógramo igual á la mitad de él.

2º Si se unen los dos puntos estremos de un lado no paralelo de un trapecio con el punto medio del otro opuesto será el triángulo formado igual á la mitad del trapecio.

Resol. Descompuesto el triángulo en dos partes iguales por la recta que une los dos puntos medios de los lados no paralelos tómese por la base dicha recta &.

3º (Teorema de Pappo). Si se construyen sobre los lados AC y BC de un triángulo ACB como bases dos paralelógramos cualesquiera, y ademas prolongados los lados estremos de estos hasta cortarse en P si se trazan por A y B dos paralelos á la recta PC hasta que corten los lados que se unen en P, será unidos los puntos de interseccion

1º el cuadrilátero así formado un paralelógramo

2º igual á la suma de los primeros

Resol. Dos lados opuestos son igual á PC, ademas aplíquese V, 7.

Por qué es el teorema de Pitágoras un caso especial de dicho teorema? (Véase fig. 103b)

4º En fig. 158. en donde $AD \perp BC$, tenemos

$$(AB+BD)(AB-BD)=(AC+CD)(AC-CD).$$

5º Trazados desde un punto dentro de un triángulo perpendiculares á los lados será la suma de los cuadrados de los tres segmentos, que no tienen comun un punto de interseccion, igual á la de los cuadrados de los otros.

Resol. Unido dicho punto con los vértices aplíquese el teorema de Pitágoras.

6º En todo triángulo tenemos

$$b^2+c^2=\tfrac{1}{2}a^2+2t_a{}^2$$

Resol. por V. 11 cor. 1 y 2.

7º En todo cuadrilátero (fig. 164) tenemos

$$1º\ AD^2+DC^2+CB^2+AB^2=AC^2+BD^2+4JK^2$$
$$2º\ AC^2+DC^2+BD^2+AB^2=AD^2+BC^2+4HF^2$$

Resol. por 6º

8º En todo trapecio (fig. 167) tenemos

$$AC^2+DB^2=AD^2+BC^2+2AB.CD$$

Resol. por 7º caso 2º, si se atiende al III. 13; hay otra resolucion por V, 11. cor. 1 y 2.

9º Si en un cuadrilátero las diagonales son perpendiculares entre sí, serán iguales las sumas de los cuadrados de los lados opuestos.

10º Si dos cuerdas son perpendiculares entre sí, será la suma de los cuadrados de los cuatro segmentos igual al cuadrado del diámetro.

Resol. por el teor. de Pitágoras y § 88, 1.º

11º Trazadas las tres medianas en un triángulo será:

$$3(a^2+b^2+c^2)=4(t_a{}^2+t_b{}^2+t_c{}^2)$$

12º Siendo X un punto de la base AC del triángulo isósles ABC tenemos:

$$AB^2-BX^2=AX.CX$$

13º Si dos puntos A y B de un diámetro equidistan del centro y siendo P un punto cualquiera de la circunferencia, será la suma (AP^2+BP^2) una cantidad constante, á saber independiente del lugar donde esté P en la circunferencia.

14º en el triángulo rectángulo (fig. 105) tenemos.

$$c+h>a+b$$

Resol. Aplíquese que $c^2=a^2+b^2$ y $ch=ab$.

15 La suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelógramo es igual á la de los cuadrados de los lados.

Resol. por 6º

§ 53. PROBLEMAS.

Probl. 1º—4º Transformar un triángulo en otro igual que tenga la misma base y ademas:

1º sea isósceles, 2º tenga el ángulo á la base igual á $\sphericalangle\alpha'$

3º un lado igual á la recta c', 4º el ángulo al vértice igual á $\sphericalangle\beta'$.

Probl. 5º—6º Transformar un triángulo en otro igual, que tenga el mismo ángulo á la base y ademas que

5º tenga la base igual á la recta b', 6º la altura igual á la recta h'.

Resol. Véase qué propiedad tienen las rectas que unen los dos vértises con los dos puntos estremos de las bases.

Probl. 9º—10º Transformar un cuadrado en un rectángulo igual, 9º que tenga un lado dado, 10 un perímetro dado.

Resol. (V. 11 cor. 3, 2º)

Probl. 11—14. Dado un cuadrado formar otro que sea 11 el duplo, 12 la mitad, 13 el triplo, 14 el quíntuplo del otro.

Probl. 15—17. Transformar un cuadrado en un rombo igual: 15 que tenga un lado dado, 16 una diagonal dada. 17 una altura dada.

Resol. Fórmese ántes un rectángulo que tenga la propiedad pedida, de donde es la resolucion fácil.

Probl. 18. Un triángulo dado transformar en otro rectángulo igual y de hipotenusa dada.

Probl. 19. Transformar un triángulo en otro igual que tenga otra base y otro ángulo al vértice.

Probl. 20. Dividir un paralelógramo en dos partes iguales por medio de una recta que pase por un punto dado.

Resol. Cuál es el punto en el paralelógramo, por el que trazada una recta siempre lo divide en partes iguales?

Probl. 21. Encontrar en un triángulo un punto que unido con los vértices divida el triángulo en tres partes iguales.

Resol. Cual es el lugar geométrico de un triángulo que es la tercera parte del triángulo y tiene la misma base?

Probl. 22—23. Encontrar en la recta AB un punto X, de manera que:

$$22\ AX^2-XB^2=d^2,\quad 23\ AX^2+XB^2=a^2.$$

Resol. Analizando levántese perpendiculares, para 22 en el punto B é igual á d, para 23 en el punto X é igual á la recta a; ademas aplíquese el teorema de Pitágoras y atiéndase á las propiedades de los triángulos isósceles.

23 Inscribir en un círculo un rectángulo igual á un cuadrado dado.

Resol. Atiéndase á la diagonal del rectángulo pedido.

Probl. 24 Circunscribir á un círculo un rombo igual á un cuadrado dado.

Resol. Se conocerá la altura del rombo y por tanto el lado y así está el problema reducido al probl. 62 del Art. III.

ARTICULO V.

EJERCICIOS PRÁCTICOS RELATIVOS AL CAP. VII.

§ 54. PREGUNTAS.

1. Qué propiedad deben tener los segmentos que se tratan en el teor. 4, para que se verifique el paralelismo indicado por la nota?

2. Por qué se ha puesto el teor. 7?

3. Cómo se demuestra el teor. 12 haciendo abstraccion de la semejanza?

4. Cómo se enuncia el teor. 12 estando dividido el ángulo exterior en dos partes iguales?

5. Cómo se demuestra directamente el teor. 13 aplicando la construccion del teor. 12?

6. Qué distincion hay entre los casos de congruencia y semejanza?

7. Qué recta es media proporcional entre las dos partes de un diámetro

8. Cuáles son los recíprocos de los teoremas 15, 16, 17 y 18 y cómo se demuestran?

§ 55 LUGARES GEOMÉTRICOS.

Explicacion. Una recta AB está interiormente dividida en la razon m:n si el punto de division está entre A y B, pero exteriormente si el punto de division está en la prolongacion de AB; luego siempre se verificará AX:BX=m:n.

1. El lugar geométrico de un punto en el cual una recta trazada desde un punto fijo P hasta una recta dada q, está dividida interior y exteriormente en la razon m:n, son dos rectas paralelas á la dada q.

Resol. Trazando una recta cualquiera por P hasta q divídase en dicha razon &a.

2. El lugar geométrico de un punto en el cual una recta trazada entre dos secantes y paralelamente á una tercera dada, queda dividida interior y exteriormente en la razon m:n, son dos rectas que pasan por el punto de interseccion de las dos secantes (VII. 4.)

3 El lugar geométrico de un punto encima de una recta AB cuya distancia á esta es la media proporcional entre los segmentos de AB, es una semicircunferencia cuyo diámetro es AB (VII 14, § 1°)

4. El lugar geométrico de un punto, cuyas distancias á dos secantes están en la razon m:n, son dos rectas que pasan por el punto de interseccion de las secantes.

Constr. por Art. II probl. 151.

5. Dada la base *a* de un triángulo y la razon de otro lado á su altura (m:n), el lugar geométrico del vértice será una circunferencia.

Constr. Trazada en un punto estremo de á una perpendicular x, de modo que x:a=m:n, será la circunferencia cuyo diámetro es x, la pedida.

Demost. es fácil. (El análisis es difícil).

6. Dado de un triángulo la base a y el ángulo α del vértice, encontrar el lugar geométrico del círculo inscrito.

Resol, Descrito sobre BC=a como cuerda un arco capaz del ángulo α y dividido el arco restante que completa la circunferencia en dos partes iguales por el punto Q, sabemos que el centro del círculo inscrito estará siempre en la recta que une el punto Q con un punto cualquiera P del otro arco capaz del ángulo α. Ahora bien, siendo X dicho centro, se demuestra que QB=QX y se conoce el lugar geométrico de X.

§ 56. TEOREMAS.

1° Los lados homólogos de dos triángulos semejantes están entre sí como sus alturas respectivas.

2º En todo triángulo dos lados son inversamente proporcionales á sus alturas respectivas.

3º Si dos triángulos tienen la misma base y están entre las mismas paralelas, una recta trazada paralelamente á la base comun, formará segmentos iguales dentro de los dos triángulos.

4º Una recta trazada paralelamente á los lados paralelos de un trapecio por el punto de interseccion de las diagonales, se halla dividida en dos partes iguales por dicho punto y los lados no paralelos.

5º En todo trapecio están cuatro puntos en línea recta: los puntos medios de los lados paralelos, los puntos de interseccion de las diagonales y de los lados no paralelos.

6º Si los lados de un triángulo rectángulo forman una proporcion continua, será el cateto menor igual á la proyeccion del mayor sobre la hipotenusa.

7º Si los dos segmentos de una recta son proporcionales á los de otra, que está dividida en media y extrema razon, lo será tambien la primera.

8º Si una recta está dividida en media y extrema razon, será la suma de los cuadrados de la recta entera y del segmento menor igual al triple cuadrado del segmento mayor.

Resol. $x^2=a\,(a-x)=a^2-ax=(a-x)^2-x^2+ax$ &a.

9º Si se trazan por el punto de contacto de dos circunferencias dos rectas hasta cortar á estas, serán directamente proporcionales los segmentos de estas rectas.

Resol. Atendiendo al IV. 21 se puede aplicar VII. 8.

Qué propiedad tienen las cuerdas que resultan uniendo los dos puntos de interseccion en cada círculo?

10 Trazada á una circunferencia una tangente que corte á dos paralelas tambien tangentes á ella, el radio será media proporcional entre los dos segmentos de la tangente trazada.

Resol. Aplíquese VII, 14 por medio de IV, 22.

11. Forman una proporcion los cuatro triángulos, en los cuales se halla dividido un cuadrilátero por las diagonales.

12 Dos triángulos, que tienen un ángulo igual son proporcionales á los rectángulos formados por los lados que comprenden dicho ángulo.

13. Si se unen los pies de dos alturas de un triángulo será el triángulo parcial así formado semejante al total.

Resol. IV, 20.

14. Los rectángulos formados de los segmentos en los cuales se hallan divididos mútuamente las alturas de un triángulo son iguales.

Resol. IV, 20 y VII, 15 y 16.

15. En el paralelógramo (fig. 101.) se encuentran en el mismo punto las rectas JF, CE y GH.

Resol. VII, 4 cor.

16. En todo triángulo (ABC) están en línea recta el punto de interseccion de las alturas (H), el de las medianas (M) y el centro (O) del círculo circunscrito; ademas HM=2MO.

Resol. Siendo F y G los puntos medios de AC y BC, ademas D y E los pies de las alturas á los lados BC y AC trácese las rectas respectivas y se puede fácilmente demostrar que

1º $\triangle AHB \sim GOF$ 2º $BHM \sim FOM$ de donde &.

NOTA. Constrúyase la figura segun lo dicho.

17. El triángulo formado por las alturas de otro es semejante á este.

18. Las áreas de dos triángulos que tienen un ángulo igual son proporcionales á los productos de los dos lados que comprenden dicho ángulo.

§ 57. PROBLEMAS.

NOTA. En el problema siguiente se puede ver como se ha de manejar las proporciones para que por su medio se pueda resolver geométricamente un problema; ademas aparece la distincion que hay entre una resolucion difusa y sencilla.

Probl. (fig. 176). En un triángulo construir un cuadrado, de manera que un lado esté situado en la base y los otros dos vértices en los lados del triángulo.

Anál. Siendo en el $\triangle$ BAC $\square$ QMNP el pedido denotemos PN por x y AN por y, ademas AD la altura á BC por h; de donde se sigue

$$MN:AN=BC:AC$$

ó $\quad x:y=a:b$

ademas es $\quad h:x=b:b-y$

luego $\quad h:y=a:b-y$

ó $\quad h:a=y:b-y$

luego $\quad h+a:h=b:y$

Ahora debemos ver como dicha proporcion se puede construir diestramente: h+a y b son rectas correspondientes y se encuentran en el punto A, luego será muy á propósito prolongar AD hasta E, de manera que DE=a; de donde se ve al momento que las rectas CE y ND son paralelas, y por tanto se puede encontrar el punto N, pues son dados los puntos E, C y D.

Constr. Prolongando AD hasta E, de manera que DE=a y uniendo E con C, trácese DN ∦ EC, despues trazado NM ∦ BC bájese desde N y M las perpendiculares NP y MQ á BC y NMQP será el cuadrado pedido.

Dem. Siendo NMQP un rectángulo (constr.) se necesita demostrar que MN=NP

$\quad AD:DE=AN:NC$

ó $\quad AD:BC=AN:NC$

pero $\quad BC:AC=NM:AN$

luego $\quad AD:AC=NM:NC$

ademas es $\quad AD:AC=PN:NC$

luego $NM:NC=PN:NC$
de donde $NM=PN$

Otra solucion mas sencilla.

Análisis. Siendo &a. como arriba.
de donde $y:b=x:a$

Para representar esta proporcion basta unir A con P y prolongar AP hasta que corte á la perpendicular levantada á BC en el punto C, y será $CE'=a$. Ahora conocemos el punto A y E' luego P y por tanto N, M, Q.

Constr. Levantando $CE'=a$ perpendicular á BC y trazando E'A levántese en el punto de interseccion P una perpendicular á BC hasta cortar AC en N, despues &a. como arriba.

Dem. Por ser PNMQ un rectángulo, resta demostrar $MN=NP$.

$$AN:MN=b:a$$
$$AN:NP=AC:CE'=b:a$$

luego $AN:MN=AN:NP$
de donde $MN=NP$.

1. *Determinacion de puntos y construccion de rectas.*

Probl. 1—2. Dividir una recta a en la razon $m:n$, 1º interiormente, 2º exteriormente.

Resol. 1º $x:a-x=m:n$ de donde $a:x=m+n:m$
2º $x:a+x=m:n$ „ $a:x=n-m:m$

Luego los problemas están reducidos al § 33 prob. 1.

Probl. 3—4. Dividir interiormente una recta AB, de modo que

3º $AX\times BX=m^2$, 4º $AB\times BX=m^2$

Resol. VII. 14 y IY 19.

Probl. 5. Dada la recta $AB=a$ encontrar en su prolongacion un punto X, de modo que $AX.BX=AB^2$ ó $(a+x)\,x=a^2$.

Resol. VII. 17 siendo AB el diámetro del círculo.

Probl. 6. Dividir á la recta $AB=a$ interiormente, de modo que $AB\times BX=AX^2$ ó $a(a-x)=x^2$.

Resol. 1ª es la misma que § 33 probl. 5º

Resol. 2ª Puede reducirse al 5º pues
$a-x:x=x:a$ luego $a:x=a+x:a$.

Probl. 7. De una proporcion de rectas se conoce los términos estremos y la razon de los medios, encontrar los últimos, es decir:
$a:x=y:b$, $x:y=m:n$.

Resol. Encontrado p de la proporcion $m:n=b:p$ se sigue que $a:y=y:p$, luego aplíquese § 33 probl. 3.

Probl. 8. Encontrar dos rectas cuya suma y media proporcio-

nal se conocen; á saber
$x+y=s$, $x:a=a:y$

Resol. probl. 3º

Probl. 9. Encontrar dos rectas cuya diferencia y media proporcional se conocen, á saber
$x-y=d$, $x:a=a:y$

Resol. VII, 17.

Probl. 10. De una proporcion se conocen los términos estremos y la suma de los medios encontrar estos.
$x+y=s$, $a:x=y:b$.

Resol. Encontrando p de la proporcion $a:p=p:b$ se sigue que $p:x=y:p$ luego aplíquese el probl 8.

Probl. 11. De una proporcion se conocen los términos estremos y la diferencia de los medios, encontrar estos, es decir
$x-y=d$, $a:x=y:b$.

Resol. Encontrado p de la proporcion $a:p=p:b$, póngase $x=d+y$ ó $y=x-d$ y aplíquese VII 17 siendo d el diámetro y p la tangente.

Nota. Los probl. 10 y 11 contienen la solucion geométrica de la ecuacion cuadrada; pues tenemos cuatro formas distintas de esta, siendo a, b, c cantidades positivas.

1) $x^2+ax=bc$ ó $x(a+x)=bc$
2) $x^2-ax=bc$ „ $x(x-a)=bc$
3) $x^2-ax=-bc$ „ $x(a-x)=bc$
4) $x^2+ax=-bc$ dará para x un valor negativo, luego para encontrar el valor de x geométricamente es presiso tomar la tercera forma.

Probl. 12. Prolongar la recta AB hasta el punto X de modo que $AB:AX=m:n$.

Probl. 13—14. Dividir una recta a en dos partes x y $a-x$ de modo que

$$13\ x:a-x=m^2:n^2$$
$$14\ x^2:(a-x)^2=m:n.$$

Resol. para 13. Tómese $mp=n^2$.

Resol. para 14. Por ser $m:n=m^2:nm$ fórmese $nm=p^2$.

Probl. 15—16. Por un punto dado P dentro de un ángulo A trazar una recta que corte á los lados del ángulo en dos puntos X é Y, de modo que

15 $AX:AY=m:n$, 16 $PX:PY=r:s$.

Resol. de 16. Se puede encontrar en la prolongacion de AP un punto Z de modo que $AP:PZ=r:s$.

Probl. 17—18. Son los mismos estando P fuera del ángulo.

Probl. 19—20. Por el vértice C de un triángulo ACB trazar una recta de modo que siendo X é Y los pies de las perpendicu-

lares á dicha recta desde A y B, se tenga
19 $AX:BY=m:n$, 20 $CX:CY=m:n$.

Probl. 21—23. Dado el triángulo ABC trazar una recta paralela á AC hasta que corte AB y CB en los puntos X é Y de modo que

21 $AX+CY=s$, 22 $AX-CY=d$, 23 $BX+XY+YB=m$.

Resol. para 21 y 22. Siendo $AX:CY=AB:CB$ aplíquese VI. 5.

Cuídese de dar á esta construccion la elegancia de que es susceptible.

Resol. de 23 se reduce al problema: trazar entre dos lados de un triángulo una recta igual á una dada y paralela al tercer lado.

Probl. 24—26. Son los mismos con tal que XY corte las prolongaciones de BA y BC.

Probl. 27—28. Dado un ángulo BAM trazar desde B á AM ó su prolongacion una recta BX, de manera que

27 $BX:BA=m:n$, 28 $BX:AX=m:n$.

Probl. 29—30. Dado un triángulo ABC trazar desde B una recta que corte AC ó su prolongacion, de modo que

29 $BX^2=BA.BC$, 30 $BX^2=AX.CX$.

Resol. de 30. En qué círculo será BX la mitad de una cuerda ó tangente?

Cuándo no puede ser cuerda y cuándo no tangente?

Probl. 31—36. Dado un triángulo ABC trazar una recta paralela al lado AC que corte AB y BC ó sus prolongaciones en los puntos X é Y de modo que

31. $BX:XY=XY:AC$. | 34. $BX:XY=XY:XA$
32. $BX:XY=XY:AB$. | 35. $BX:XY=XY:YC$
33. $BX:XY=XY:BC$, | 36. $BX:XY=YC:AB$

Resol. Siempre tendrá lugar que $BX:XY=AB:AC$:
para 34 sesultará $BX:XA=AB^2:AC^2$
para 35 sabiendo que $BY:XY=BC:AC$ resultará
$BY:YC=AB.BC:AC^2$

2º CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS.

Probl. 37—41. Construir un triángulo rectángulo si se conocen:

37. la hipotenusa y la razon entre los catetos,
38. la altura y la razon entre los catetos,
39. la altura y la razon entre los segmentos,
40. un segmento y el cateto no adyacente.
41. la hipotenusa y la condicion que los tres lados formen una proporcion continua. (por VII 14).

Probl. 42—46. Contruir un triángulo isósceles si reconocen:

42. la altura y mediana lateral,
43. las dos alturas.
44. la altura lateral y el radio del círculo inscrito,
45. el ángulo del vértice es igual á R y la suma de la base y su altura.
46. la base y la razon entre la altura y el lado.

Resol. de 44 (fig.175). Siendo h' la altura lateral, ρ el radio y h la altura de la base tendremos. $\frac{1}{2}h':\rho=h:h-\rho$.

* *Probl.* 47—54. Construir un triángulo si se conocen $b:c$, α y uniendo cada vez una de las partes siguientes:

$$a,\ h_a,\ t_a,\ q_a,\ (m-n,\ (a+b+c,\ r,\ \rho.$$

De la misma manera únaseles en los problemas siguientes:

55—62	$a:b:c$,	79—86	$m:n$, α,	103—110	$h_a:h_b:h_c$,
63—70	$c:b$, β,	87—94	$h_b:h_c$, α,	111—118	$m:n,(\beta-\gamma)$,
71—78	$a:h_a$, α,	95—102	$b:c$, $(\beta-\gamma)$,	119—126	$q_a:h_a$, α,
127—134	$a^2:b^2:c^2$.	145—142	$t_a:t_b:t_c$,	143—150	$\alpha:\beta:\gamma=2:3:4$

Nota. La primera parte determina siempre la forma. es decir un triángulo cualquier pero semejante al pedido; luego con dicho triángulo uniendo cada vez uno de los ocho datos fácilmente se tendrá el pedido.

Para construir el triángulo semejante daremos unos indicios.

Resol. de 87—94. Atiéndase al § 56, 2.

Resol. de 95—102. Siendo (fig. 174) CAB el triángulo pedido y $\sphericalangle\delta=(\beta-\gamma)$, trácese BD=AC y será AD ∦ BC; de donde se vé que la forma del △ABD está determinada, y por ser AD ∦ BC lo será tambien la de BAC.

Resol. de 103—110. Atiéndase al § 56, 17.

Resol. de 111—118. En la fig. 161 está determinada la forma del △CAE y por tanto la de CAB

Resol. de 119—126. La forma del triángulo formando por q_a y h_a está determinada, de donde se conoce el $\sphericalangle\beta$,

Resol. de 125—142. La forma del triángulo formado por $\frac{2}{3}t_a$, $\frac{2}{3}t_b$, $\frac{2}{3}t_c$ está determinada.

Resol. 143—150. Por medio de las proporciones dadas se puede determinar los ángulos α, β, γ.

Nota. De un modo análogo al empleado se pueden proponer muchos problemas.

Probl. 151—159. Construir un triángulo si se conocen.

151 a, $(b+c)$, $b:c$	154 α, $(a-c)$, $b:c$	157 a, α, $b.c$
152 a, $(b-c)$, $b:c$	155 a, α, $b:h_a$	158 h_a, α, $b.c$
153 α, $(a+c)$, $b:c$	156 a, β, $b:h_a$	159 h_a, h_b, h_c

Resol. de 155 y 156. Se puede encontrar h_b.

Resol. 157 y 158. Por ser dado el $\sphericalangle\alpha$ se conoce la razon $b:h_c$ luego $c.h_c$ y por tanto $a.h_a$ &.

* Si es dada la razon a:b, por eso no se conoce a ó b sino solo la razon, á saber a:b=r:s en donde r y s son las rectas dadas.

3. CONSTRUCCION DE CUADRILÁTEROS.

Probl. 160—165. Construir un trapecio si se conocen (fig.167):

160 a:b, h, ∢af, ∢bf	163 a:c, h, ∢ae, ∢be
161 a:c, h, ∢ae, ∢af	164 e:f, h, β, ∢ef
162 a:c, h, ∢ae, ∢ef	165 e:f, h, ∢ae, ∢be

Resol. de 161 y 162. Se puede encontrar (a+c)

Resol. de 164. Se puede reducir á la construccion de un triángulo del cual se conocen b:c, h_a y α

Probl. 167—172. Construir un cuadrilátero si se conocen (fig. 168).

167 a, γ, δ, ∢bf, ∢de	170 a, a:c, α, β, γ
168 a, ∢be, ∢ce, ∢cf, ∢df	171 a, e:f, α, γ, ∢ef
169 a, a:b, α, β, γ	172 a, e:f, β, α, ∢ef

Resol. de 171 y 172. Por medio de los probl. 50 y 51 del § 49 se conocen las formas de los cuadriláteros pedidos.

4. VARIOS PROBLEMAS.

Probl. 173—174 Por el punto P de contacto de dos círculos trazar una recta que corte á la una circunferencia en X á la otra en Y de modo que

173. PX+PY=s, 174 PX—PY=d.

Probl. 175. Dada una circunferencia y dos puntos en ella A y B trazar en esta una cuerda paralela á una recta dada de modo que las perpendiculares, trazadas desde A y B á la cuerda, formen una razon dada.

Probl. 176. Desde un punto estremo de un diámetro de una circunferencia dada trazar una secante hasta la tangente, trazada en el otro punto estremo del diámetro, de modo que la parte exterior de la secante sea igual á una recta dada.

Probl. 177. Bajo la misma condicion trazar la secante cuya parte exterior sea igual á la interior.

Probl. 178. Desde el punto medio de un arco de una circunferencia dada trazar una cuerda que corte á la cuerda del arco dado de manera que la parte de la cuerda trazada terminada por el punto de interceccion y la otra parte de la circunferencia sea igual á una recta dada.

Resol. Trazadas dos cuerdas adyacentes resultarán dos triángulos semejantes, que le reducen al probl. 9.

Probl. 179. Trazar una secante bajo la misma condicion.

Probl. 180. Por dos puntos dados describir una circunferencia de manera que la tangente trazada desde otro punto dado á ella sea igual á una recta dada.

Resol. Se puede hallar un tercer punto de la circunferencia pedida.

Probl. 181. Desde un punto dado fuera de un círculo trazar una secante de manera que la parte interior sea media proporcional entre la parte exterior y la total.

Probl. 181. Formado en una circunferencia un ángulo central trazar en esta una cuerda que esté dividida en tres partes iguales por los lados del ángulo.

Resol. VII. 4.

Probl. 183. Inscribir en un círculo dado un rectángulo cuyos catetos formen una razon dada.

Probl. 184. Inscribir en un semicírculo un cuadrado.

Probl. 185. Inscribir en un segmento un cuadrado.

Resol. Formado sobre la cuerda como lado un cuadrado véase que tres puntos están en una misma recta.

Probl. 186. Inscribir en un cuadrilátero un rombo cuyos lados sean paralelos á las diagonales del cuadrilátero.

Resol. Llamando y (fig. 168) la distancia del vértice del rombo al punto D y x el lado del rombo se tendrá fácilmente:

e+f:f=c:y y f+e:f=e:x.

Probl. 187—188. Construir un círculo que

187 pase por dos puntos y toque una recta dada.

188 pase por un punto y toque dos rectas dadas.

Resol. de 187 VII, 17. 188 se reducirá al 187.

5. TRANSFORMACION DE LAS FIGURAS.

Probl. 189—191. Transformar un cuadrado.

189 en un triángulo equilateral de igual área.

190 en un rombo de igual área que tenga un ángulo dado.

191 en un rectángulo de igual área cuyos lados formen una razon dada.

Resol. de 189. Fórmese un triángulo equilateral cuyo lado sea igual al del cuadrado, y siendo a el lado y h su altura, ademas las partes correspondientes del triángulo pedido x é y tendremos $y^2=2ah$.

Resol. de 190 de manera semejante.

Probl 192—194. Transformar un triángulo en otro igual que sea 192 equilátero, 193 semejante á otro dado, 194 isósceles de ángulo dado al vértice.

Resol. De una manera semejante que en los ejemplos precedentes.

Probl. 195. Transformar un triángulo en un rombo de igual área que tenga un ángulo dado.

Probl. 196. Transformar un polígono en otro igual que sea semejante á otro dado.

Resol. Puede reducirse al 193.

6. DIVISION DE LAS FIGURAS.

Probl. 197. Transformar un polígono en otro semejante cuya área sea la n^a parte del primero.

Resol. VII. 29.

Probl. 198—202 Dividir en n partes iguales á un triángulo dado, de modo que las rectas de division.

198 salgan de un punto dado de un lado.

199 salgan de un punto dado dentro del triángulo

200 sean paralelas á un lado.

201 sean perpendiculares á un lado.

202 sean paralelas á una recta dada.

Resol. Encontrado un triángulo que es la nª parte del dado, la resolucion se reducirá á los del nº 5º.

Nota. Los problemas 196—202 no conviene ejecutarlos gráficamente, basta indicar el modo de resolverlos.

ARTICULO VI.

Ejercicios relativos al cap. VIII.

§ 58. TEOREMAS.

1º Todo polígono equiángulo é inscrito en un círculo es regular si el número de los vértices es impar.

Resol. Tomando por ej. un pentágono cuyos arcos sucesivos sean a, b, c, d, e, se tendrá: $a+b=b+c=c+d=d+e=e+a$, de donde &a. reduciendo al VIII, 3.

¿Qué conclusion se tendrá si el número de vértices es par?

3º Todo polígono equilátero y circunscrito á un círculo es regular si el número de los vértices es impar.

Resol. Tomando por ej. un polígono y llamando m, n las partes del lado primero en las cuales se halla dividida por el punto de contacto, o, p del segundo &a.

$$m+n=o+p=q+r=s+t=u+v=m+n$$

ademas sabemos $n=o$, $p=q$, $r=s$, $t=u$, $v=m$

luego $m=p$, $o=r$, $q=t$, $s=v$, $u=n$

luego &a. reduciendo al VIII 4.

3º Todo polígono regular de número par de lados tiene estos paralelos de dos en dos.

4º Bajando desde un punto interior de un polígono regular de n lados perpendiculares á estos, será la suma de ellas igual al n veces la apotema.

Resol. Determínese el área del polígono de dos maneras distintas.

5º Uniendo dos vértices inmediatos de un pentágono regular con los puntos extremos de dos lados adyacentes resultarán

a) un rombo *b*) dos triángulos isósceles congruentes c) un tercero isósceles cuya base es un laod del pentágono; ademas las

diagonales se dividen mutuamente en media y extrema razon.

6º Un pentágono equilátero que tiene tres ángulos iguales es regular.

Resol. Se necesita demostrar que se puede circunscribir al pentágono un círculo.

7º Las áreas de dos polígonos circunscritos á un mismo círculo son proporcionales á sus perímetros.

8º El área de un círculo es la media proporcional entre dos polígonos, de los cuales uno está circunscrito á este y otro, semejante al primero, tiene un perímetro igual á la circunferencia.

Resol. Denotando por A el área del polígono circunscrito, or A′ el del círculo, por A″ el del polígono semejante determínese A:A′ y A′:A″.

9º Describiendo sobre la hipotenusa AB del ángulo rectángulo ACB (fig. 177) un semicírculo, y lo mismo sobre los catetos AC y BC, será la suma de las áreas N y M (lunulas de Hipócrates) igual á la del triángulo.

Resol. Determínese $(M+m)+(N+n)$ &a.

10. Siendo (fig. 178) CD perpendicular á AB en un punto cualquiera y describiendo sobre AB, AC y CB semicírculos, será el área de la figura (falce de Arquímedes) ADBFCEA igual á la del círculo cuyo diámetro es CD.

11. La diferencia entre las áreas de dos círculos concéntricos es igual á la de un círculo cuyo diámetro es una tangente trazada en un punto de la circunferencia menor y limitada por la circunferencia mayor.

§ 59. PROBLEMAS.

Probl. 1º ¿Qué líneas habrán de trazarse en un triángulo equiliátero para que resulte un exágono regular inscrito prescindiendo de los vértices del triángulo propuesto?

Probl. 2º ¿Cómo se obtendrá de un cuadrado un octógono haciendo abstraccion de los vértices del primero?

Probl. 3—8. Construir un círculo.

3º cuya circunferencia sea igual á la suma de otras dos.

4º cuya circunferencia sea igual á la diferencia de las de otras dos.

5º cuya rea sea ignal á la suma de otros dos.

7º cuya áarea sea igual á la diferencia de otros dos.

7º cuya área sea igual á un múltiplo de un otro.

8º cuya área sea igual á la nª parte de un otro.

Probl. 9—10. Dividir un círculo en 2, 3, 4 &a. partes iguales por medio de circunferencias que

9º sean concéntricas al dado.

10 toquen á la primera y entre sí en un punto dado.

§ 60. PROBLEMAS RESUELTOS POR CÁLCULO.

Advertencia. Conviene dar problemas numéricos relativamente á las fórmulas siguientes, como á las del § 38.

1º Determinar el área de un triangulo equilátero dado el lado $=a$

$$\triangle=\tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3}$$

2º Determinar el área de un cuadrado dada la diagonal igual á d

$$\square=\tfrac{1}{2}d^2$$

3º Determinar el área de un cuadrado dada la suma de la diagonal y un lado igual á s

$$\square=s^2\,(3-2\sqrt{2})$$

4º Determinar el área de un cuadrado dada la diferencia entre la diagonal y el lado igual á d

$$\square=d^2\,(3+2\sqrt{2}).$$

5º Determinar los dos lados de un rectángulo dado el perímetro igual á $2p$ y el área igual á m^2.

Resol. Siendo x é y los lados será

$$x.y=m^2 \text{ pero } x+y=p$$

luego tendremos

$$x^2-px+m^2=0$$

Las dos raices de esta ecuacion serán los dos lados. (Véase § 118, 1º Algebra del P. Kolberg).

6º Determinar el área de un triángulo dados los tres lados

$$\triangle=\sqrt{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

siendo p la mitad del perímetro y a, b, c los lados.

Resol. (fig. 158) $\triangle=\frac{1}{2}a\,h_a$, $h_a{}^2=c^2-n^2=(c+n)\,(c-n)$
n se determinará por V, 11 cor.

7º Determinar el área de un triángulo dadas las tres medianas.

$$\triangle=\tfrac{4}{3}\sqrt{p'(p'-t_1)\,(p'-t_2)\,(p'-t_3)}$$

siendo t_1, t_2, t_3 las tres medianas y p' la mitad de la suma de estas.

Resol. Qué parte del triángulo pedido es el formado por las $\frac{2}{3}t_1$, $\frac{2}{3}t_2$, $\frac{2}{3}t_3$?

8º Determinar el área de un triángulo dado el perímetro y el radio del círculo inscrito

$$\triangle=\rho p \quad \text{de donde} \quad \rho=\frac{1}{p}\sqrt{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$$

9º Determinar el área de un triángulo dado el producto de los tres lados y el radio del círculo circunscrito

$$\triangle=\frac{a.b.c}{4r} \quad \text{de donde} \quad r=\frac{a.b.c}{4\sqrt{p(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}}$$

Resol. VII, 18.

10. Dado el radio de un círculo determinar el lado del po-

lígono regular inscrito *a* con 4 lados, *b* con 6 lados, *c* con 10 lados.

$$l_4=r\sqrt{2},\ l_6=r,\ l_{10}=\tfrac{1}{2}r\,(\sqrt{5}-1)$$

11. Dado el radio de un círculo y el lado del polígono regular inscrito encontrar una fórmula que determine el lado del inscrito con doble número de lados

$$l_{2n}=\sqrt{2r^2-2r\sqrt{r^2-\tfrac{1}{4}l_n{}^2}}$$

12. Dado el radio de un círculo y el lado del polígono regular inscrito encontrar una fórmula que determine el lado del circunscrito con el mismo número de lados.

$$l_n'=\frac{r\,l_n}{\sqrt{(r^2-\frac{1}{4}l_n{}^2)}}$$

Nota 1ª Las fóamulas 11 y 12 pneden servir para determinar el valor de π.

Nota 2ª Algunos problemas pueden darse sobre el anillo que se forma por dos círculos concéntricos. Siendo R y r los radios de los dos círculos, d la distancia de las dos circunferencias, t la tangente al círculo interior y terminada por la circunferencia exterior.

Sí se conocen:

1. R, r	2. R, t	3. R, d
4. r, t	5. r, d	6. t, d
7. (R+r), d	8. (R+r), t	9. t:d, r,

encontrar las otras partes.

FIN DE LA PARTE PRIMERA

INDICE.

CAPÍTULO I.

Relaciones entre líneas rectas § 1—§ 3.

CAPÍTULO II.

Triángulos § 4—§ 8.

CAPÍTULO III.

Paralelógramos. § 9—§ 12.

CAPÍTULO IV.

Círculo § 13—§ 18.

CAPÍTULO V.

Áreas de las figuras rectilíneas § 19—§ 23.

CAPÍTULO VI.

Proporciones en geueral § 24—§ 26.

CAPÍTULO VII.

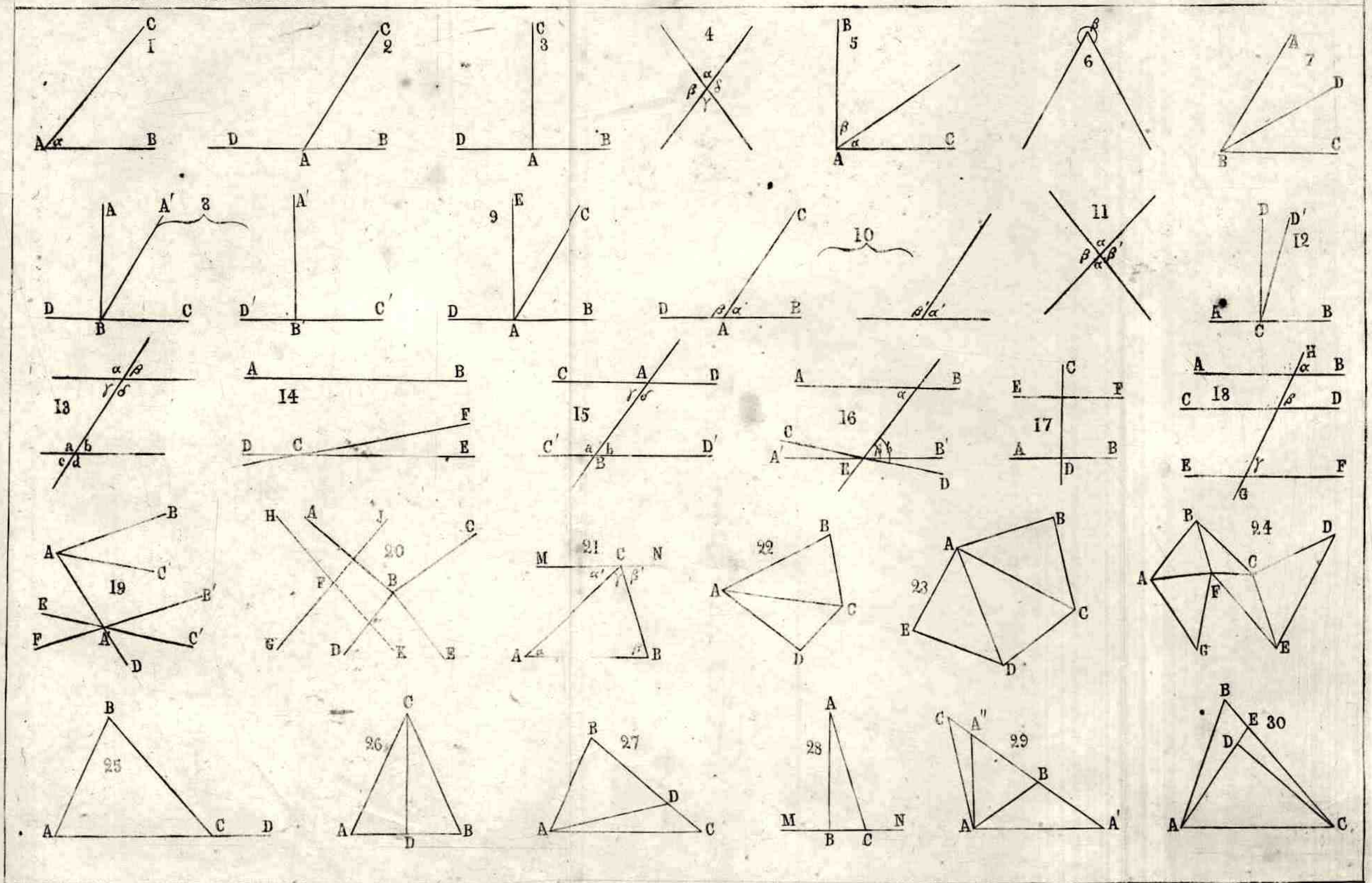
Proporciones entre cantidades geométricas y semejanza de figuras. § 27—§ 33.

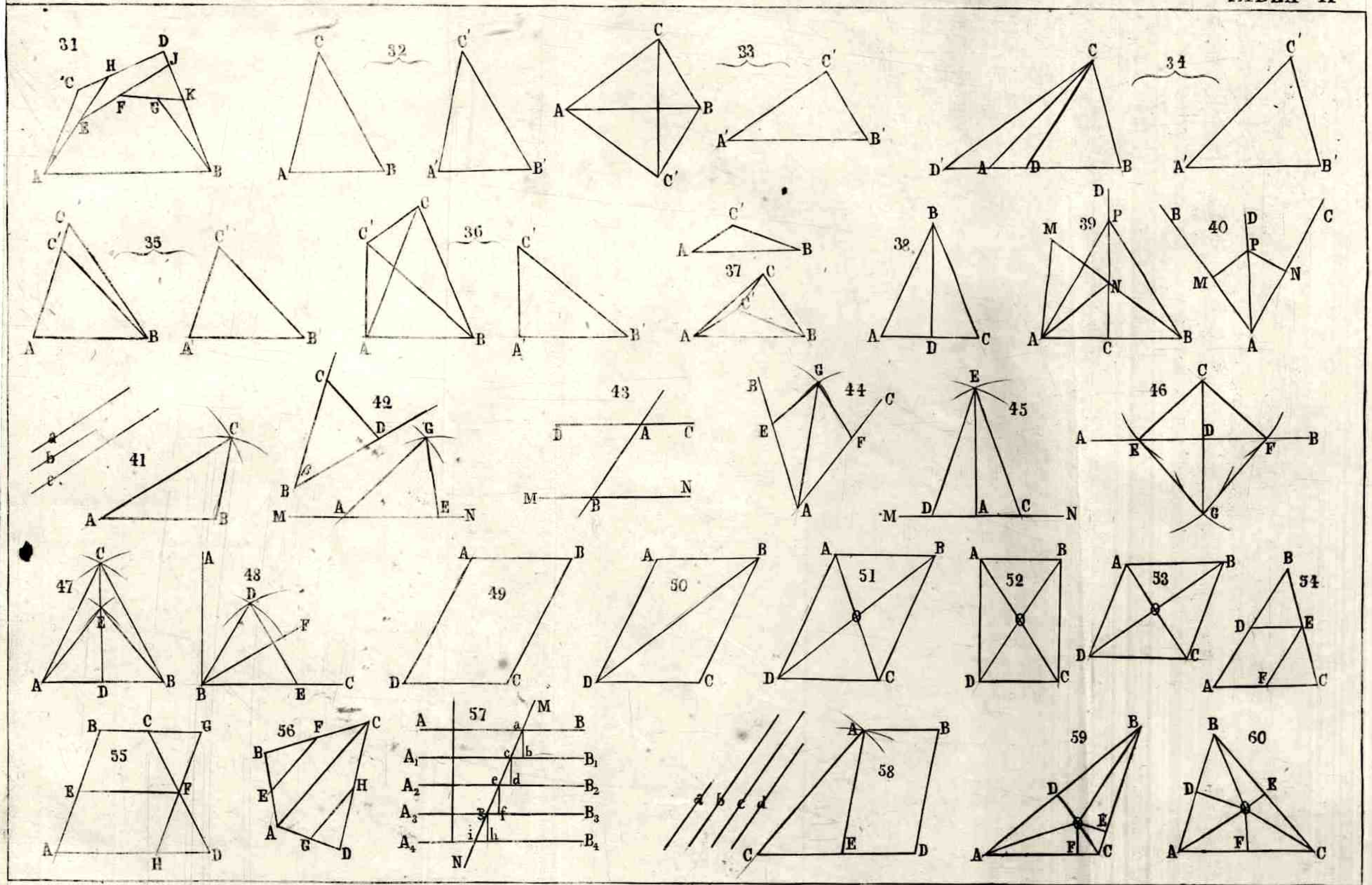
CAPÍTULO VIII.

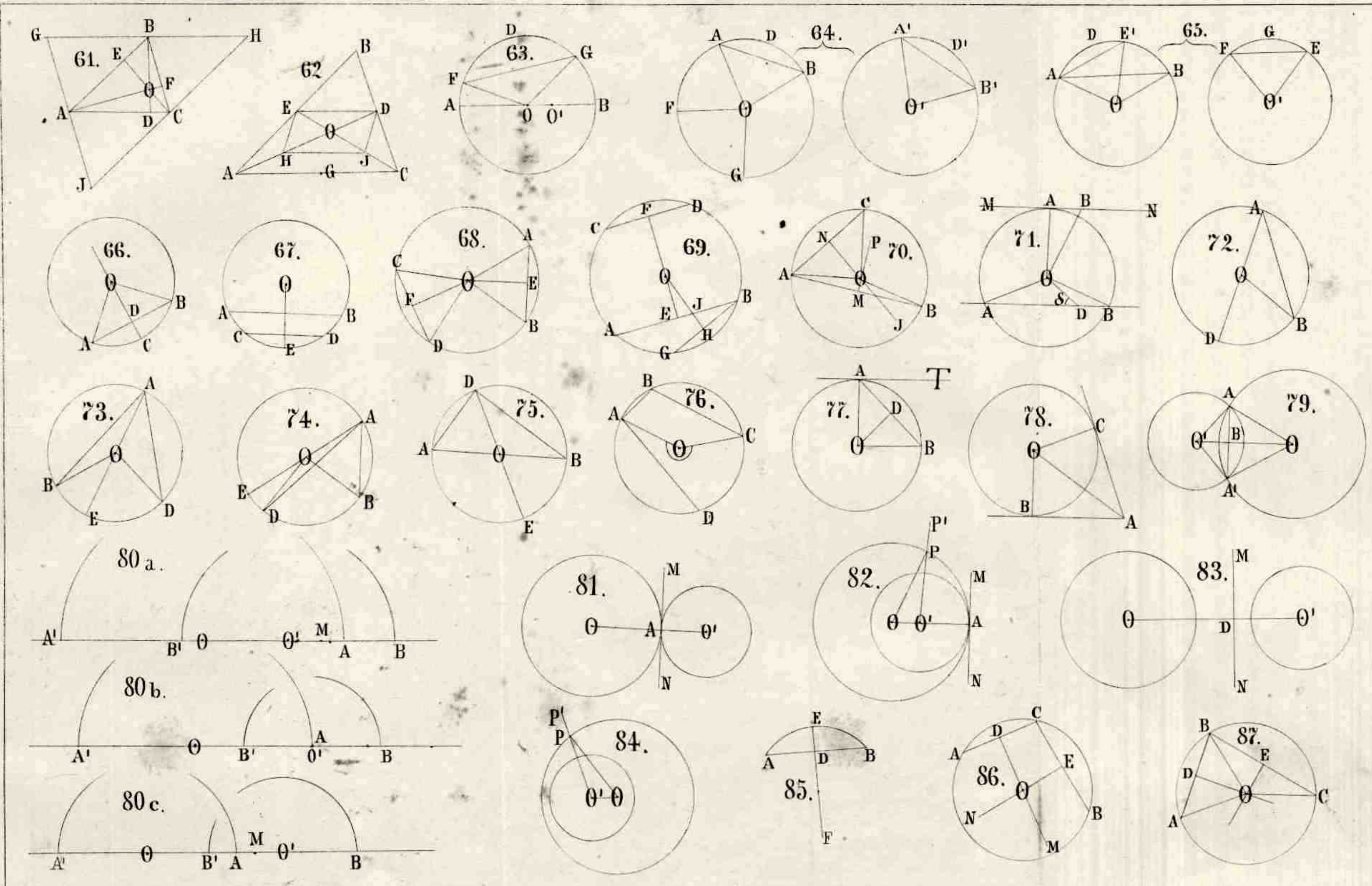
Polígonos regulares y medida del círculo. § 54—§ 38.

CAPÍTULO IX.

Ejercicios prácticos § 39—§ 60.

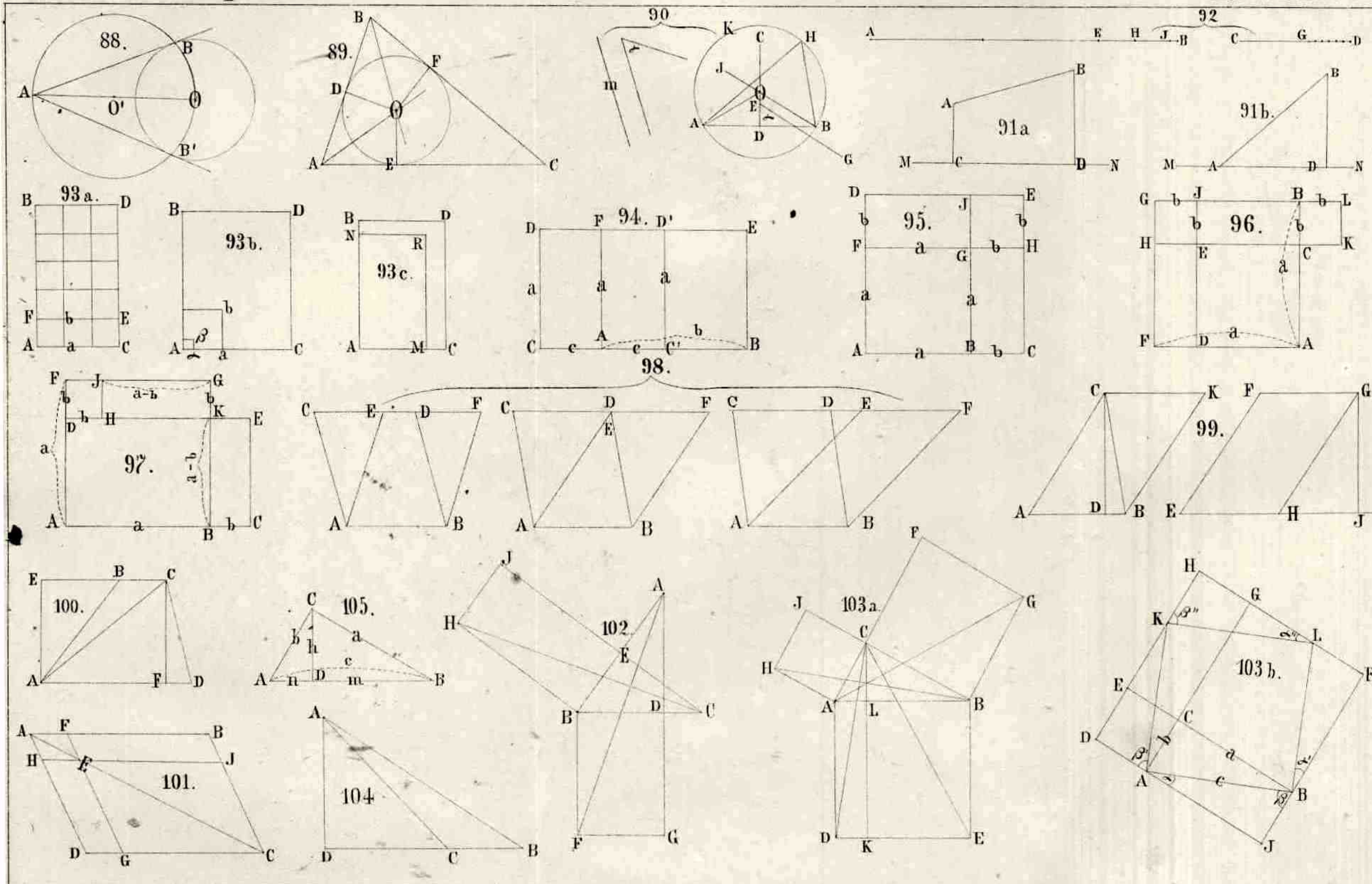

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30

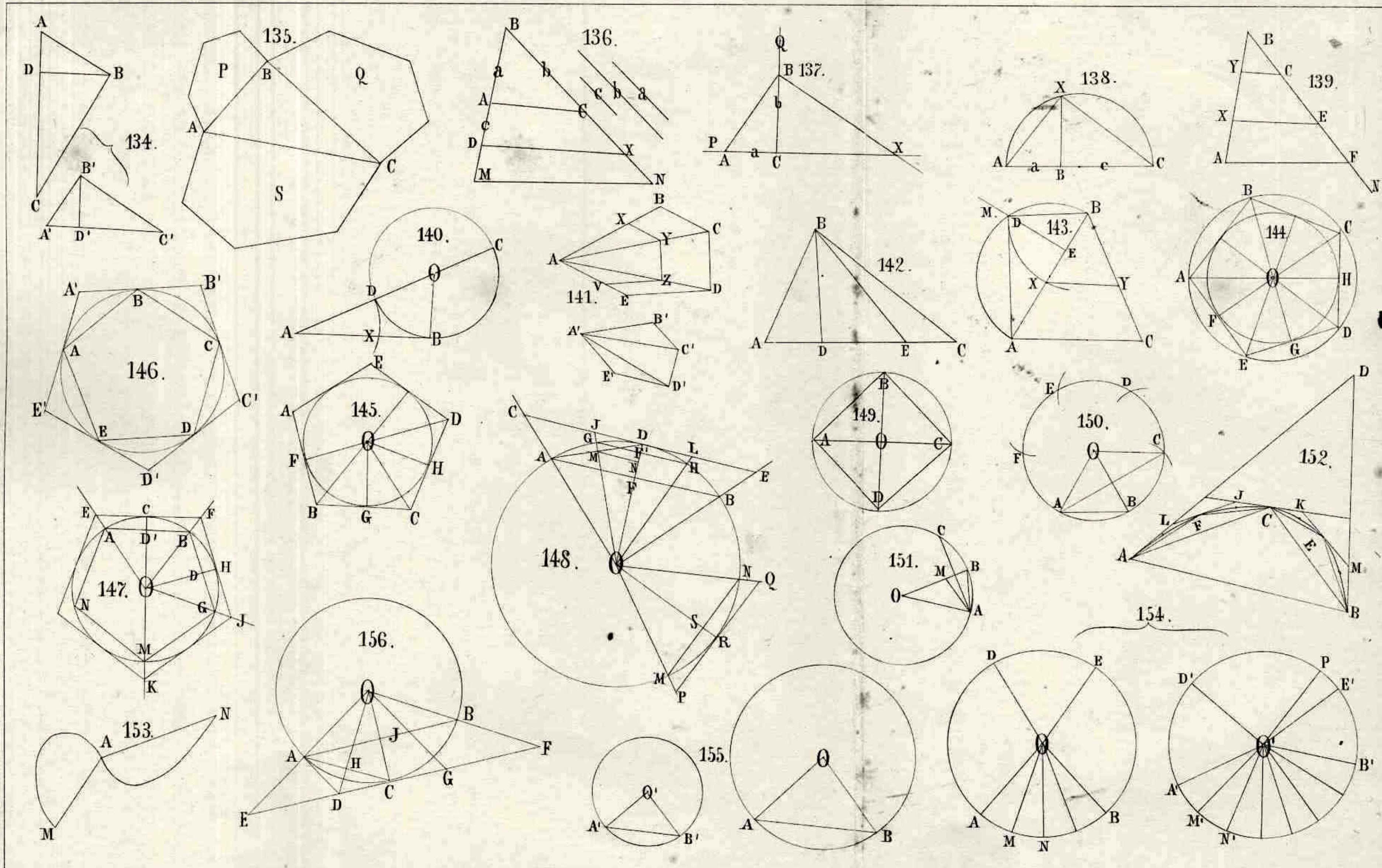

31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60


61.
62
63.
64.
65.
66.
67.
68.
69.
70.
71.
72.
73.
74.
75.
76.
77.
78.
79.
80 a.
80 b.
80 c.
81.
82.
83.
84.
85.
86.
87.

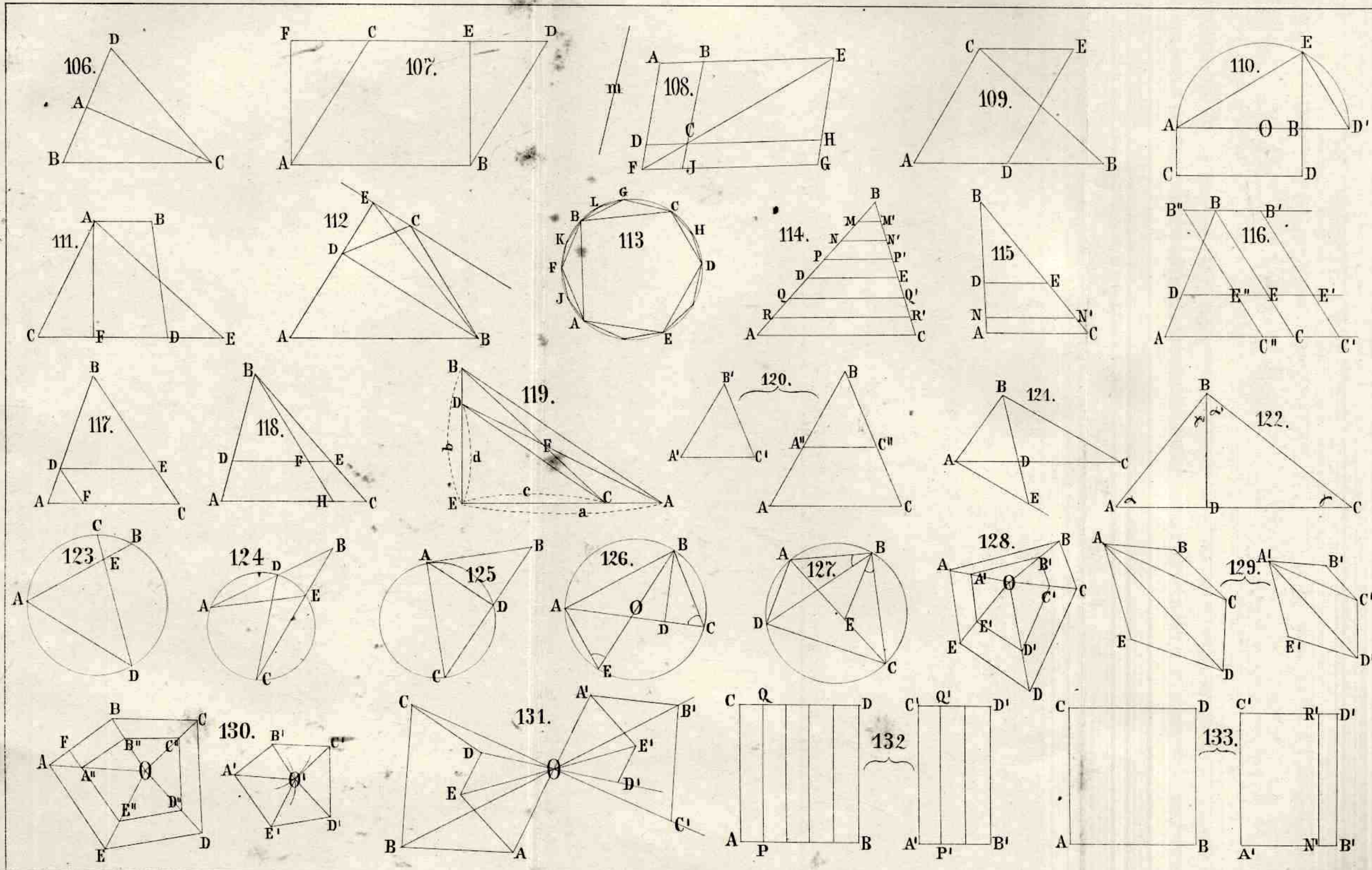
Geometria plana.

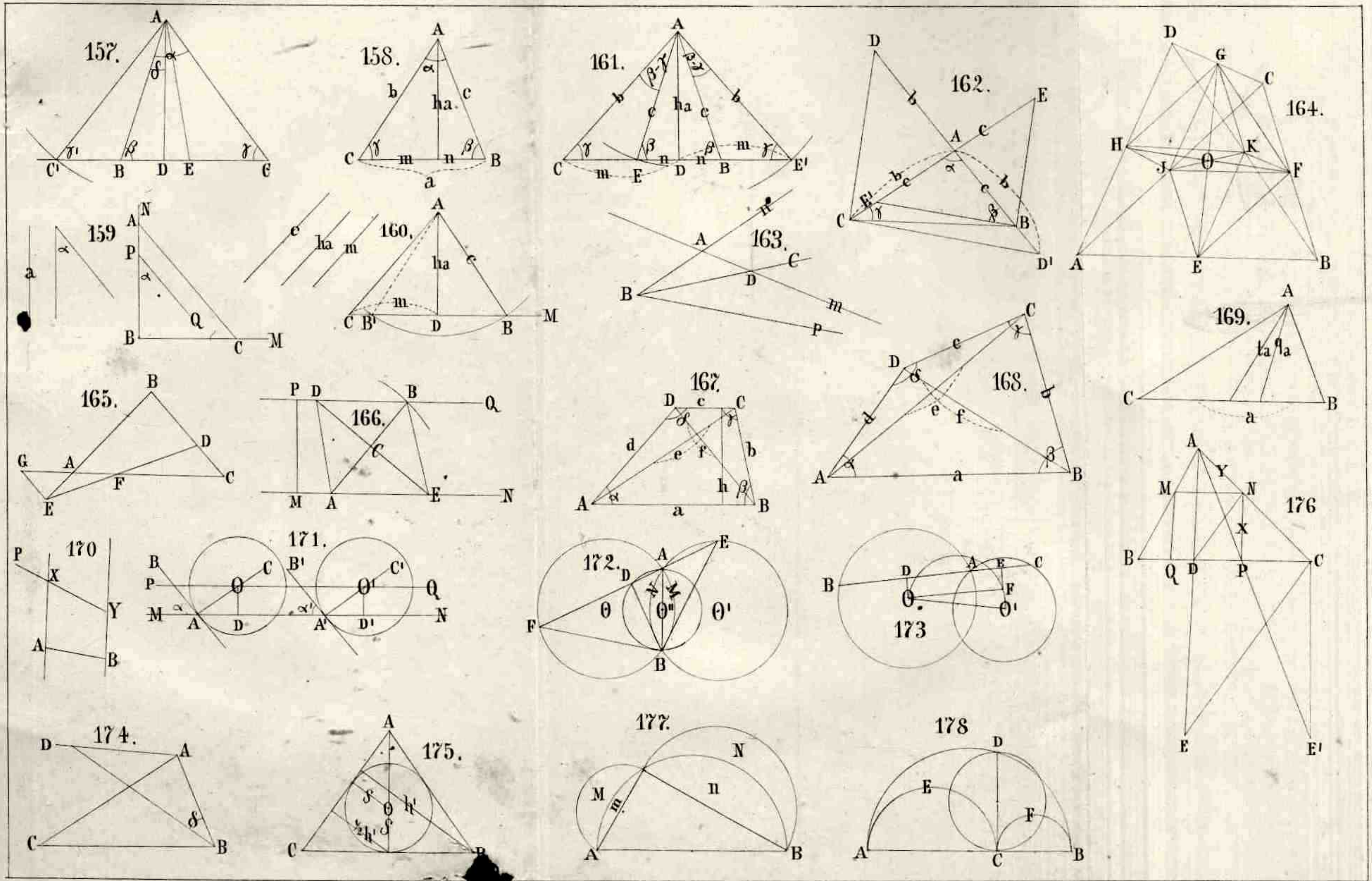
Lam. IV.




134.
135.
136.
137.
138.
139.
140.
141.
142.
143.
144.
145.
146.
147.
148.
149.
150.
151.
152.
153.
154.
155.
156.

Geometria plana. **Lam. V.**




157.
158.
161.
162.
164.
159
160.
163.
165.
166.
167.
168.
169.
170
171.
172.
173
176
174.
175.
177.
178