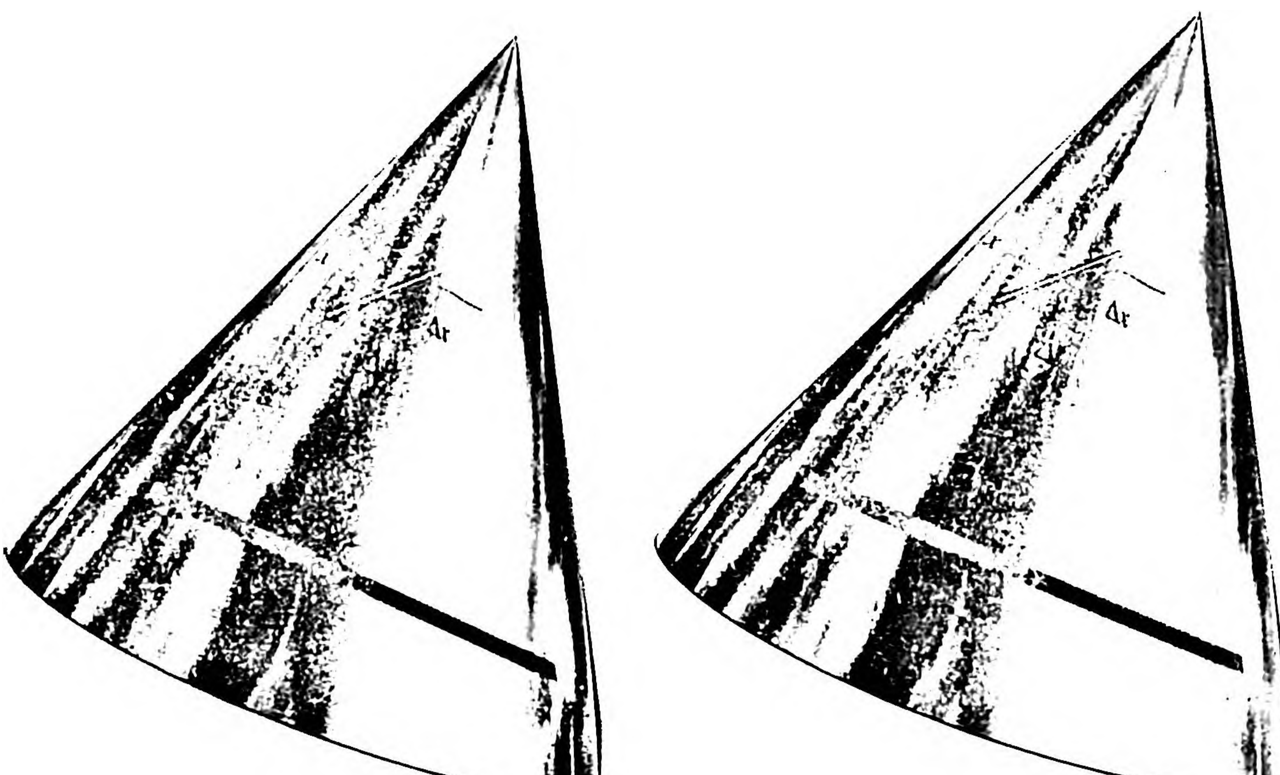
INTRODUCCIÓN A LA
FÍSICA
UNIVERSITARIA
Manual de problemas

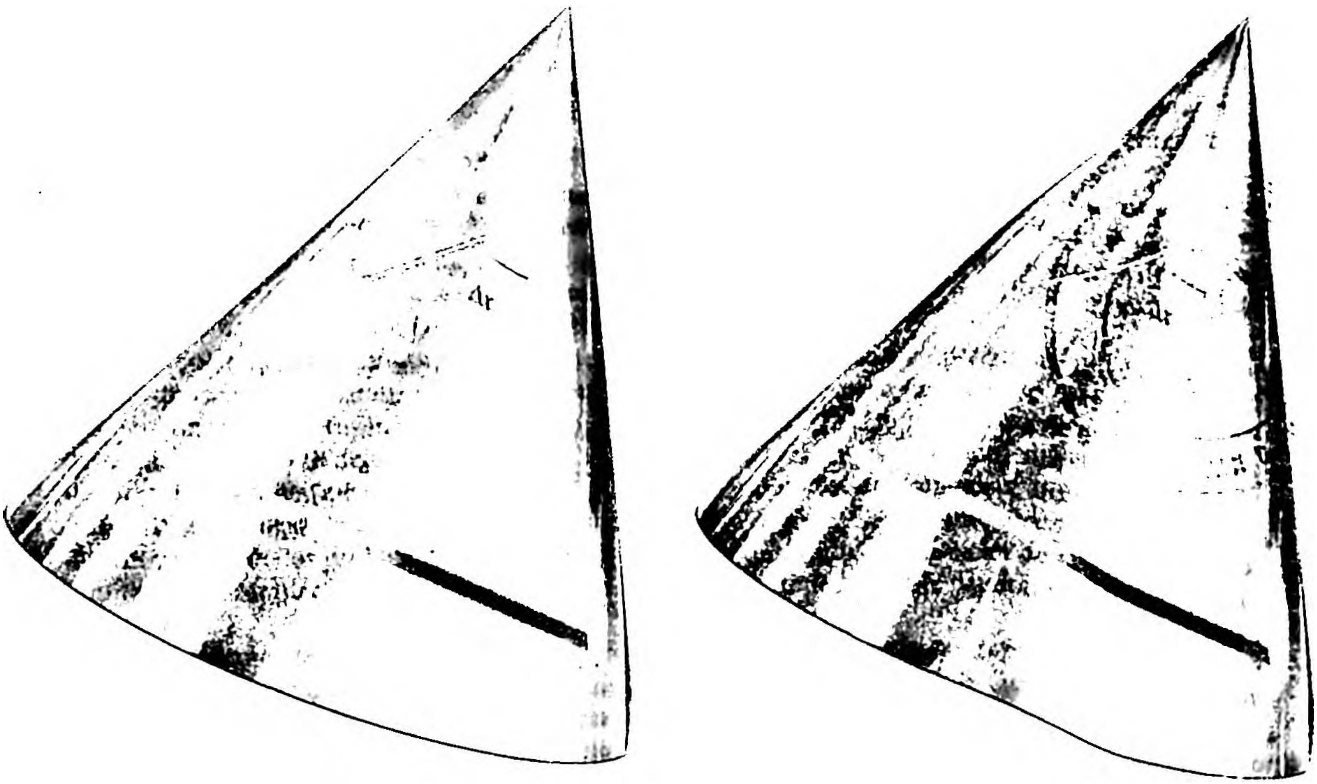


**TECNOLÓGICO
DE MONTERREY ®**

INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA UNIVERSITARIA

Manual de problemas

Hugo Alarcón • Genaro Zavala



EDITORIAL TRILLAS
México, Argentina, España
Colombia, Puerto Rico, Venezuela

Catalogación en la fuente

Alarcón, Opaso Hugo
Introducción a la física universitaria : manual de problemas. -- México : Trillas : ITESM, 2006 (reimp. 2011).
212 p. : il. ; 27 cm.
ISBN 978-968-24-7799-7

1. Física - Estudio y enseñanza. I. Zavala Enríquez, Genaro. II. t.

D- 530.07'A663ip LC- QC6'A5.52 4381

División Administrativa,
Av. Río Churubusco 385,
Col. Gral. Pedro María Anaya,
C. P. 03340, México, D. F.
Tel. 56884233
FAX 56041364

División Comercial,
Calzada de la Viga 1132,
C. P. 09439, México, D. F.
Tel. 56330995, FAX 56330870

www.trillas.com.mx

Tienda en línea
www.etrillas.com.mx

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial
Reg. núm. 158

Primera edición 8-SM (ISBN 978-968-24-7799-7)
♦(11-SM, SO)

Reimpresión, 2011

Impreso en México
Printed in Mexico

Se imprimió en
Impresora Publimex, S. A. de C. V.
B 75 TW

Prólogo:

El presente libro de problemas es un complemento útil del libro de texto *Introducción a la Física universitaria. Conceptos y herramientas.*

Los autores nos hemos dado cuenta, a partir de nuestra experiencia directa en el salón de clases, que el estudiante, con frecuencia se siente desubicado con respecto a qué hacer con los conceptos que encuentra en un libro de texto. De este modo, hemos creado este libro como un recurso didáctico complementario, pero significativo, que le facilite al alumno adquirir seguridad y ubicar los contenidos teóricos.

Los problemas que se presentan en este libro son ejemplos que hemos creado para asignarlos como tareas en los últimos años. Conforman un conjunto realista de problemas que facilitan el aprendizaje del estudiante a lo largo del curso.

Los problemas vienen organizados en los mismos capítulos que el libro de texto, para su fácil ubicación. Cada capítulo contiene problemas resueltos y problemas propuestos. Los problemas resueltos tienen la intención de ser una guía de razonamiento para que el estudiante se dé cuenta de cómo el profesor espera que trabaje en la solución de los problemas. Tratamos de ser explícitos en la solución de cada problema para facilitar su entendimiento.

Los problemas resueltos pueden traer o no la respuesta numérica a las preguntas. En el transcurso de los años siempre hemos tenido diferentes opiniones con respecto a qué es lo más conveniente: proporcionar o no las respuestas de los problemas. Por un lado está el punto de vista de que el estudiante se pierde y/o no tiene certeza de si está resolviendo los problemas correctamente si no dispone de las respuestas, que puede ocasionar que un estudiante resuelva los problemas incorrectamente sin saberlo y así lo haga en las evaluaciones. Por otra parte, también existe el punto de vista de que al tener las respuestas de los problemas el estudiante se convierte en un mero buscador de respuestas que se limita a la manipulación de los datos para llegar al resultado indicado. Este panorama tampoco resulta alentador.

En consecuencia, los autores decidimos adoptar el punto medio de ambos razonamientos. Algunos problemas tienen su respuesta y el estudiante podrá corroborar que está haciendo bien su trabajo. También tenemos problemas sin respuesta numérica para que el estudiante, una vez reforzados los conceptos, pueda solucionar un problema hasta sentirse seguro de que lo ha hecho correctamente. Una ventaja de esta opción intermedia es que el estudiante tiene la ayuda de los problemas con solución al principio de cada capítulo.

Este libro será de mucha utilidad para los profesores que usen el libro de texto, por varias razones. El profesor tiene ante sí un ejemplo del nivel que se espera de sus alumnos ya que los temas se pueden tratar de manera muy ligera o de manera muy rigurosa. Creemos que el nivel propuesto ni es una ni la otra. Además, la gran cantidad de problemas que aquí se incluye le permitirá al profesor disponer de la opción de asignar tareas de este libro.

Ha sido nuestra intención que esta obra sea un complemento significativo, tanto para el estudiante como para el profesor y no escatimamos esfuerzos para elaborarlo; sin embargo, somos conscientes de que es perfectible y podría haber algunos errores. Mucho les agradeceremos sus comentarios al respecto.

HUGO ALARCÓN
halarcon@itesm.mx

GENARO ZAVALA
genaro.zavala@itesm.mx

Índice de contenido

1 PROBLEMAS DE Análisis dimensional

1.1 Problemas resueltos

1. Se tiene la siguiente ecuación física, útil en la transferencia de calor entre dos placas en contacto a distintas temperaturas:

$$H = \frac{A(T_2 - T_1)}{\dfrac{L_1}{k_1} + \dfrac{L_2}{k_2}}$$

Donde H es la tasa de calor por unidad de tiempo, con unidades $\left(\dfrac{\text{J}}{\text{s}}\right)$, A es el área transversal, T_1 y T_2 son las respectivas temperaturas y L_1 y L_2 los espesores de las placas.

a) Determina la dimensión y la unidad de las constantes k_1 y k_2 (coeficientes de conducción de calor).

Solución

En primer lugar identifiquemos las dimensiones de las cantidades conocidas:

Si H tiene unidades (J/s) entonces tiene dimensiones de energía/tiempo, en efecto

$$[H] = \left[\frac{\text{Energía}}{T}\right]$$

$$= \frac{\text{ML}^2}{T^3}$$

Por otro lado $[A] = L^2, [T_1] = [T_2] = \Theta, [L_1] = [L_2] = L.$

Para que la ecuación sea dimensionalmente consistente

$$\left[\frac{L_1}{k_1}\right] = \left[\frac{L_2}{k_2}\right] = \frac{L}{[k_1]}$$

Entonces, la ecuación de dimensión queda

$$H=\frac{A(T_2-T_1)}{\frac{L_1}{k_1}+\frac{L_2}{k_2}}$$

$$\frac{ML^3}{T^3}=\frac{L^2\Theta}{\frac{L}{[k_1]}}=L\Theta\ [k_1]$$

Despejando $[k_1]$ tenemos

$$[k_1]=\frac{ML}{T^3\Theta}\rightarrow\left(\frac{\mathrm{kg\cdot m}}{\mathrm{s^3\cdot K}}\right)$$

b) Investiga el significado de $\sum_{i=1}^{n}$

Solución

$\sum_{i=1}^{n}$ denota la suma de todos los términos que van desde $i = 1$ hasta $i = n$. Por ejemplo

$$\sum_{i=1}^{n} i^2=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$$

c) La generalización de la ecuación anterior para n placas es:

$$H=\frac{A(T_2-T_1)}{\sum_{i=1}^{n}\frac{L_i}{k_i}}$$

¿Cambiaría la unidad o dimensión de k_i?

Solución

El resultado no cambiaría, ya que todos los términos de la suma deben tener las mismas dimensiones.

2. En la ecuación siguiente $v_f=v_0+X\cdot t, v_f$ y v_0 son velocidades y tienen unidades de $\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)$ y t es un tiempo con unidad (s).

a) ¿Qué unidades debe tener la variable X para que la ecuación sea dimensionalmente correcta?
Solución

Los dos términos de la derecha de la ecuación deben tener las mismas dimensiones para que la ecuación sea dimensionalmente correcta, por lo tanto

$$\frac{L}{T}=[X]T \Rightarrow [X]=\frac{L}{T^2}\rightarrow\left(\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$$

b) ¿Qué cantidad física podría estar representada por esta variable?

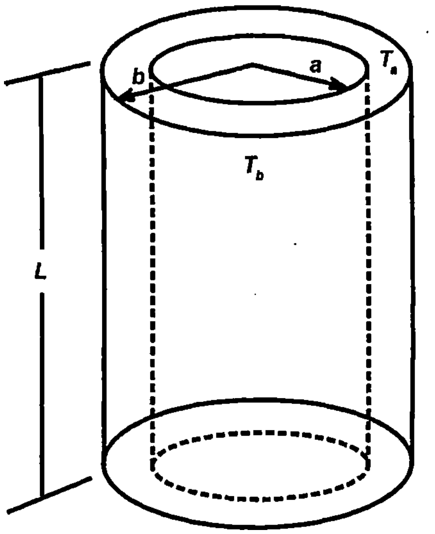
Solución

La aceleración

3. La transferencia de energía calorífica por unidad de tiempo H, medida en $\left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}\right)$, para un tubo cilíndrico, está dada por la siguiente expresión:

$$H=\frac{2\pi Lk\,(T_b-T_a)}{\ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

donde T_a y T_b son las temperaturas de la parte interior y exterior respectivamente en (K) y L es la longitud del tubo (ver figura).



¿Cuáles son las unidades de la conductividad térmica k del material?

Solución

Trabajemos igual que en el problema número 1:

$$[H]=\frac{[2\pi]\,[L]\,[ki]\,[(T_b-T_a)]}{\left[\ln\left(b/a\right)\right]}$$

$$\frac{ML^2}{T^3} = L[k]\Theta$$

Despejamos $[k]$ y tenemos

$$[k] = \frac{ML}{T^3\Theta} \rightarrow \left(\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}}{\mathrm{s}^3\cdot\mathrm{K}}\right)$$

al igual que en el problema número 1.

4. Torque.

a) Demuestra las dimensiones del torque

$$\tau = rF\mathrm{sen}\theta$$

Solución

Tenemos la siguiente ecuación para el torque (ecuación física).

$$\tau = rF\mathrm{sen}\theta$$

$$[\tau]$$

b) Investiga si el torque es una forma de energía.
Solución

Sin embargo el torque no es una forma de energía. Esto significa que dos cantidades pueden tener diferente significado aun cuando posean las mismas dimensiones.

5. La ley de los gases ideales establece:

$$pV = NK_BT$$

donde p es presión, V es volumen, N es el número de moléculas (cantidad adimensional), T es la temperatura y K_B es la constante de Boltzmann (constante con dimensiones).

a) ¿Qué dimensiones tiene pV?
Solución

$$[pV] = [p]\,[V] = \frac{M}{T^2L}L^3 = \frac{ML^2}{T^2}$$

nota que esta cantidad tiene dimensiones de energía.

b) ¿Qué dimensiones tiene K_BT?
Solución

El término del lado derecho debe tener las mismas dimensiones para que sea dimensionalmente consistente, así

$$[K_B T] = \frac{ML^2}{T^2}$$

c) ¿Cuál es la diferencia entre pV y K_BT?

Solución

La única diferencia dimensional es que el lado derecho contiene la temperatura.

d) Se podría decir la "temperatura de Boltzmann" como $T_B = K_BT$. En este caso, ¿qué unidades tendría T_B?

Solución

Si se define la temperatura como $T_B = K_BT$, tendría dimensiones de energía y se mediría en (J).

6. La energía de una partícula en movimiento está dada por la siguiente ecuación $K = Ct\tan\left(-At^3\right)\exp\left(\frac{bx}{t^2}\right)$ donde x es la posición en metros, t es el tiempo en segundos y A, b y C son constantes. Responde las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es la dimensión de la energía K?

Solución

La dimensión de energía está dada por: ML^2/T^2

b) ¿Cuál es la dimensión de x?

Solución

x es posición y la dimensión de la posición es longitud, L.

c) ¿Cuál es la dimensión de t?

Solución

t es tiempo con dimensión propia, T.

d) ¿Cuál es la dimensión del lado derecho de la ecuación? Explica tu razonamiento.

Solución

Como del lado izquierdo tenemos energía, el lado derecho debe tener la misma dimensión para tener sentido físico, por lo tanto la dimensión del lado derecho es: ML^2/T^2.

e) ¿Cuál es la dimensión de $\tan\left(-At^3\right)$? Explica tu respuesta.

Solución

No tiene dimensión porque es una función trigonométrica.

f) ¿Cuál es la dimensión de $\exp\left(\frac{bx}{t^2}\right)$? Explica tu respuesta.

Solución

La exponencial es, como la tangente, adimensional.

g) ¿Cuál es la dimensión de *C*? Explica cómo llegaste a esa respuesta.
Solución

La dimensión de *C* debe ser ML^2/T^3; porque está multiplicando dos cantidades sin dimensión y un término con dimensión de tiempo. Para tener consistencia, debemos tener dimensión de energía del lado derecho de la ecuación así que la multiplicación de la dimensión de la constante *C* por *T* debe ser la dimensión de energía. Ya con esto concluimos que la dimensión de *C* es ML^2/T^3.

h) ¿Cuál es la dimensión de $-At^3$? Explica tu respuesta.
Solución

No tiene dimensión porque es el argumento de la función trigonométrica.

i) ¿Cuál es la dimensión de *A*? Explica cómo llegaste a esa respuesta.
Solución

La dimensión de *A* es $1/T^3$ porque sabemos que At^3 es adimensional y para que esto se cumpla, *A* debe tener como dimensión, el inverso de T^3.

j) ¿Cuál es la dimensión de $\frac{bx}{t^2}$? Explica tu respuesta.
Solución

Ya que también es argumento, en este caso de la función exponencial, tampoco tiene dimensión.

k) ¿Cuál es la dimensión de *b*? Explica cómo llegaste a esa respuesta.
Solución

Partiendo de que $\frac{bx}{t^2}$ es adimensional y que conocemos la dimensión de *x* y de *t*, usando un razonamiento similar al de *i*) podemos saber que las dimensiones de *b* son T^2/L.

7. Contesta los siguientes incisos de cambio de unidades.

a) La permeabilidad del vacío en el SI es $\mu_o = 1.26\times10^{-6}\,(\mathrm{N\cdot s^2/C^2})$. Convierte μ_0 a $(\mathrm{dyne\cdot h^2/\mu C^2})$.
Solución

Para hacer este cambio de unidades tenemos que conocer las equivalencias de cada unidad; sabemos que 1 (dyne) = 10^{-5} (N), 1 (h) = 3600 (s) y 1 (C) = 10^6 (μC). Para hacer más visual el procedimiento, multiplicaremos la cantidad a convertir por las equivalencias respectivas.

$$1.26\times10^{-6}\left(\frac{N\cdot s^2}{C^2}\right)\cdot\left(\frac{1(\text{dyne})}{10^{-5}(N)}\right)\left(\frac{1(h)}{3600(s)}\right)^2\left(\frac{1(C)}{10^6(\mu C)}\right)^2$$

Haciendo estas operaciones llegamos a que nuestra cantidad original en SI

equivale a $9.72\times10^{-21}\left(\frac{\text{dyne}\cdot h^2}{\mu C^2}\right)$

8. La masa del electrón es $9.1\times10^{-28}(\text{g})$. Convierte la masa del electrón a (ton).

Solución

Sabiendo que un gramo es 10^{-6} (ton) podemos fácilmente calcular la conversión

$$9.1\times10^{-18}(\text{g})\frac{10^{-6}(\text{ton})}{1(\text{g})}=9.1\times10^{-34}(\text{ton})$$

9. Convierte $2.32\times10^5(\text{Pa})\Rightarrow\left(\frac{\text{lb}}{\text{in}\cdot\text{cm}}\right)$.

Solución

Para hacer este cambio de unidades primero es necesario saber que un (Pa) es en SI (N/m^2) y ya posteriormente tomar en cuenta las equivalencias de cada una de estas unidades fundamentales. De modo que nos queda la operación como sigue:

$$2.32\times10^5(\text{Pa})=2.32\times10^5\left(\frac{N}{m^2}\right)\frac{1(\text{lb})}{4.448(N)}\frac{1(m)}{100(\text{cm})}\frac{1(m)}{39.4(\text{in})}.$$

Esto nos da finalmente como resultado $13.2\left(\frac{\text{lb}}{\text{in}\cdot\text{cm}}\right)$.

1.2 Problemas propuestos

1. Se tiene la ecuación de posición de una partícula $x=\frac{3v^2}{at}\ln(Bt+3\pi)+\frac{2a^2t^4}{v}e^{At}$ donde v es su velocidad, a es su aceleración y t es el tiempo.

a) Demuestra que la ecuación no es dimensionalmente correcta. Muestra tu procedimiento.

b) ¿Qué cambio sugieres en la ecuación para que sea dimensionalmente correcta? Explica tu razonamiento.

Respuesta: $\left(x=\frac{3v^2}{a}\ln(Bt+3\pi)+\frac{2a^2t^3}{v}e^{At}\right)$

c) Demuestra que la ecuación que sugieres es dimensionalmente correcta. Muestra tu procedimiento.

2. En física usamos funciones de posición como la ecuación $x = 10t^2 - 30t + 40$ en donde t es el tiempo. Como todas las ecuaciones en física, esta ecuación tiene que ser dimensionalmente correcta.

a) ¿Cuál es la dimensión de la posición? Explica tu respuesta.
Respuesta: (longitud, L).

b) ¿Cuál es la dimensión del tiempo?
Respuesta: (tiempo, T).

c) Determina las dimensiones, si existen, de los números 10, 30 y 40. Explica tu razonamiento y muestra tu procedimiento.
Respuesta:

$$\left([10]=\frac{L}{T^2},[30]=\frac{L}{T},[40]=L\right).$$

d) De acuerdo a tu respuesta al inciso *c*), ¿provienen estos números de cantidades físicas? Explica cómo lo puedes afirmar.

e) Si la posición se mide en metros y el tiempo en segundos, ¿cuáles son las unidades de los números 10, 30 y 40? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (10 (m/s^2), 30 (m/s), 40 (m)).

3. Un cuerpo sigue un movimiento armónico amortiguado y su movimiento se representa con la siguiente ecuación: $x = Ae^{-bt}\cos(\omega t + \delta)$ donde x es la posición del cuerpo en un tiempo t. Responde:

a) ¿Qué dimensión tiene el lado derecho de la ecuación? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (longitud, L).

b) ¿Qué dimensión tiene la constante A? Explica tu razonamiento.
Respuesta (longitud, L).

c) ¿Cuál es la dimensión de la cantidad $-bt$? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (es adimensional).

d) ¿Cuál es la dimensión de b? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (1/T).

e) ¿Cuál es la dimensión de la cantidad $\omega t + \delta$? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (es adimensional).

f) ¿Cuáles son las dimensiones de ω y δ? Explica tu razonamiento.
Respuesta: ([δ]= adimensional, [ω]= 1/T).

4. Resuelve las siguientes transformaciones:

a) La constante de Planck h tiene un valor de $6.626\times10^{-34}(\text{J}\cdot\text{s})$, (joule-segundo). Transforma la constante de Planck a $(\text{g}\cdot\text{cm}^2/\text{s})$

Respuesta: $\left(h = 6.626\times10^{-27}\left(\frac{\text{g}\cdot\text{cm}^2}{\text{s}}\right)\right)$.

b) La constante de Boltzmann k tiene un valor de 1.38×10^{-23} (J/K). Transforma la constante de Boltzmann a (lb ft^2/s^2 K).

Respuesta: $\left(k = 3.28\times10^{-22}\left[\frac{\text{lbft}^2}{\text{Ks}^2}\right]\right)$.

c) La velocidad de la luz c tiene un valor de 3×10^8 (m/s). Transforma la velocidad de la luz a (añoluz/año).

Respuesta: $\left(c = 1\left[\frac{\text{añoluz}}{\text{año}}\right]\right)$.

5. Se tienen las siguientes ecuaciones. Demuestra, mostrando tu procedimiento, si son dimensionalmente correctas.

a) $v_2^{\,2} = v_1^{\,2} + 2a(x_2 - x_1)$ donde v_1 y v_2 son velocidades, x_1 y x_2 son posiciones y a es aceleración.
b) $K = F(x_2 - x_1) + P(V_2 - V_1)$ donde x_1 y x_2 son posiciones, V_1 y V_2 son volúmenes, K es energía cinética, F es fuerza y P es presión.
c) De acuerdo a tus respuestas, ¿puedes afirmar que las ecuaciones anteriores son ecuaciones correctas que se usan en física? Explica tu respuesta.

6. Problema de investigación. La resistencia eléctrica de materiales se mide en ohms. Su símbolo es la letra omega del alfabeto griego Ω. Es decir, un pedazo de alambre puede tener una resistencia de 10 (Ω). Además, la resistencia de un alambre de sección transversal A y de longitud l está dada por $R = \rho\frac{l}{A}$ donde ρ es la resistividad del material con que está hecho el alambre. Investiga en la biblioteca digital o internet lo siguiente:

a) La equivalencia de la unidad omh en unidades fundamentales en el SI.
b) La dimensión de la resistencia.
c) La dimensión de la resistividad.
d) La resistividad del cobre, del silicio y del vidrio.

7. Completa la siguiente tabla de dimensiones y unidades

Cantidad física	*Dimensión*	*Unidad en el SI*
Densidad de masa		
Presión		
Ángulo		
Energía		
Temperatura		
Entropía		
Corriente eléctrica		
Campo eléctrico		
Campo magnético		

8. Determina las dimensiones de las siguientes cantidades:

a) volumen.
b) aceleración (rapidez/tiempo).
c) densidad (masa/volumen).
d) fuerza (masa × aceleración).
e) corriente eléctrica (carga/tiempo).

9. Para cada uno de los casos de abajo, investiga el nombre especial que reciben las unidades en el SI.

a) energía → Joule (*J*) (ejemplo)
b) potencia
c) $\mathrm{Kg \cdot m \cdot s^{-2}}$
d) corriente eléctrica
e) fuerza
f) $\mathrm{Kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}$

10. Entre las siguientes cantidades, identifica aquellas que no tienen dimensión.

a) 68°
b) sen(68°)
c) e^{68}
d) fuerza
e) 6
f) frecuencia
g) log(0.0034)

11. Determina las dimensiones de k en cada una de las expresiones.

a) $\mathrm{sen}(kx)$ donde x es una longitud.
b) 10^{kx}
c) $\cot(kx^2 / R)$ donde R también es una longitud.

12. Determinar si las siguientes ecuaciones son dimensionalmente correctas

a) $S = S_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ donde S es un desplazamiento en un tiempo t, S_0 es un desplazamiento en $t = 0$, v_0 es la velocidad en un tiempo $t = 0$ y a es una aceleración constante.

b) $P = \sqrt{\rho g h}$ donde P es la presión, ρ es la densidad, g es la aceleración de la gravedad y h es la altura.

13. De acuerdo a lo estudiado, la dimensión de la energía es ML^2/T^2. En las siguientes ecuaciones prueba si la energía cumple con esta dimensión. Concluye si la ecuación es o no correcta dimensionalmente.

a) $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ (m, masa; v, velocidad).

b) $E_p = mgh$ (m, masa; g, gravedad; h, altura).

c) $E_k = \frac{1}{2}kx^2$ (k, constante elástica, tiene dimensión de fuerza entre longitud; x, longitud).

14. El calor se transfiere por un material por conducción térmica. La ecuación que representa este fenómeno es la siguiente.

$$\frac{Q}{\Delta t} = k\frac{A\Delta T}{\Delta L}$$

En la ecuación $\frac{Q}{\Delta t}$ es el calor por unidad de tiempo, ΔL es la longitud entre los puntos del material con la diferencia de temperatura ΔT y A es el área por donde se está transmitiendo el calor. Investiga las dimensiones de Q y determina la dimensión de la constante k.

15. Las estrellas pueden oscilar levemente con una frecuencia ω(1) que depende de una propiedad de la estrella, llamada densidad, y que viene dada por la siguiente ecuación.

$$\rho = \frac{3m}{4\pi R^3}$$

donde m es la masa de la estrella y R es el radio de la misma.(2) La frecuencia de oscilación de la estrella también podría depender del radio de ésta y de la constante universal de Newton que aparece en la siguiente ecuación.

$$F = \frac{Gm_1m_2}{d^2}$$

donde F representa la fuerza entre dos masas (m_1, m_2) y d es la distancia que separa estas dos masas. Si suponemos que

$$\omega = K\rho^a R^b G^c$$

(1) Se conoce como la letra griega *omega* minúscula.
(2) El símbolo ρ corresponde a la letra griega *rho* minúscula y usualmente se utiliza en física para denotar densidad.

con K una constante adimensional. Encuentra los valores de a, b y c para que esta ecuación sea dimensionalmente correcta.

16. En la siguiente ecuación P es la presión, ρ es la densidad, g es la aceleración gravitacional, v es la velocidad y h es la altura.

$$P = \frac{1}{2}\rho v^{a} + \rho g h$$

Encuentra a para que la ecuación sea dimensionalmente correcta. ¿En qué unidades se mide la presión?

17. Tenemos la siguiente ecuación donde x representa una posición y t representa el tiempo

$$x = A\exp(-bt)\cos(\omega t + \theta)$$

¿Cuáles son las dimensiones de las constantes A, b, ω y θ? ¿En el SI, cuál es la unidad de cada constante?

18. El cuadrado de la velocidad de una partícula sometido a una aceleración uniforme a es una función a y del desplazamiento s, según la expresión

$$v^2 = k a^m s^n$$

donde k es una constante adimensional.

a) ¿Cuánto deben valer m y n para que la ecuación sea dimensionalmente correcta? (Explica bien tu procedimiento).
b) Si la velocidad de la partícula es 32.1 (pie/min) expresa esta velocidad en (m/s).

19. En problemas de física te vas a encontrar que la posición en función del tiempo comúnmente se escribe con ecuaciones como la siguiente expresión

$$x(t) = at - b\frac{1}{t} + ct^3$$

donde a, b y c son constantes.

a) ¿Qué dimensiones deben tener a, b y c?
b) Si la ecuación pertenece al movimiento de una partícula y ésta, en cierto momento, lleva una velocidad de 20.0 (pulg/min).

20. En Física 3 vas a ver que el *desplazamiento eléctrico*, **D**, y el *campo eléctrico*, **E**, están relacionados como se muestra en la siguiente ecuación

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

donde ε es la permisividad.

a) Si **D** se puede expresar como la carga por unidad de área (Q/A) y **E** se puede expresar como la fuerza por unidad de carga (F/Q), encuarta las dimensiones de ε.

b) Si la *constante eléctrica* se define como

$$K = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$

donde $\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\left(\frac{C^2}{Nm^2}\right)$, ¿cuál es la dimensión de *K*? (C es coulomb y N es newton).

21. Uno de los grandes misterios de la física fundamental es el significado del tiempo de Planck t_p. Esta cantidad depende de las tres constantes fundamentales:

i. La velocidad de la luz $c = 3.0\times10^8(\text{m/s})$.

ii. La constante de la gravitación de Newton $G = 6.7\times10^{-11}\left(\text{m}^3\cdot\text{Kg/s}^2\right)$.

iii. La constante de Planck $h = 6.6\times10^{-34}\left(\text{Kg}\cdot\text{m}^2\text{/s}\right)$.

Decide si la siguiente ecuación puede o no representar al tiempo de Planck:

$$t_p = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}}$$

22. El periodo de oscilación de un péndulo es el tiempo que demora en ir y volver al mismo punto de partida. Este tiempo se denota como *P*. Esta cantidad física puede depender de otras cantidades físicas involucradas en el fenómeno, como es el caso de la masa *m*, la longitud *l* y la aceleración de la gravedad *g*. Suponiendo que éstas son las únicas cantidades involucradas en el fenómeno. Determine si la siguiente ecuación para el periodo del péndulo es consistente.

$$P = \sqrt{\frac{l}{gm^2}}$$

23. La ecuación de estado de un gas ideal viene dada por la siguiente ecuación:

$$PV = nRT$$

donde *P* es la presión del gas, *V* es el volumen del gas, *n* es el número de moles (cantidad adimensional), *R* se llama constante de los gases y *T* es la temperatura.

a) En química se acostumbra usar las siguientes unidades: (atm) *atmósferas* para la presión, (lt) *litros* para el volumen y (°C) para temperatura. Utilizando éstas, encuentra las unidades de la constante de los gases *R*.

b) Encuentra las unidades en el SI de la constate de los gases *R*.

24. Una carga *q* viajando a una velocidad *v* en el espacio donde existe un campo magnético *B* es desviada por una fuerza *F* perpendicular al campo y a su velocidad. Esta fuerza está dada por la siguiente ecuación:

$$F = qvB$$

llamada fuerza de Lorentz.

a) ¿Cuál es la dimensión del campo magnético?
b) Si la unidad de carga en SI es coulomb (C), ¿cuál es la unidad del campo magnético en SI?

25. La ecuación de Van der Waals para gases es la siguiente:

$$\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=NkT$$

donde

p	es la presión del gas (fuerza/área)
V	es el volumen del gas
T	es la temperatura el gas
a	es una constante de Van der Waals
b	es una constante de Van der Waals
N	es el número de moléculas
k	es la constante de Boltzmann

a) Determina las dimensiones de a, b y k.
b) ¿En qué unidades se miden estas constantes en el SI?

26. Determina las dimensiones de k en cada una de las siguientes expresiones:

a) $\text{sen}(kx)$ donde x es una longitud.

b) 10^{kx}.

c) $\cot\left(kx^2/R\right)$donde R también es longitud.

27. La unidad de área en el SI es el (m^2). A menudo se usa la unidad (cm^2)(donde 1 (cm) = 0.01 (m)). Usa esta información para expresar 1(cm^2) en términos de (m^2).

28. El volumen de sangre necesario para un examen médico es de 2.0 milímetros cúbicos (2.0 (mm^3)). Exprese este volumen en términos de (m^3).

29. La velocidad de una carretera en EUA se especifica en términos de la unidad (mi/h) (millas por hora). Pero en México y en la mayoría de los demás países, las velocidades se expresan en el SI. Como sabes, 1 (mi) = 1.6 (km).

a) Si un vehículo viaja a 60 (mi/h), ¿cuál es su velocidad en términos de unidad (km/h)?
b) ¿Cuál es la velocidad en términos de la unidad del SI (m/s)?

30. Convierte la aceleración

$$a=22.5\left(\text{m/s}^2\right)$$

a) a (km/h^2)
b) a (in/min^2)

31. Lleva a cabo las siguientes conversiones:

a) De 1.2 (km) a (ft)

b) De 2.5 (año) a (s)
c) De 2.32 (in/s) a (km/s)

32. Investiga la correspondencia a unidades en Sistema Internacional del año luz, unidad astronómica y ángstrom.

33. La razón del flujo sanguíneo F a través del capilar está dado por $F = As$, donde A es el área de la sección transversal del capilar y s es la velocidad del flujo. Para un capilar típico $A = 5.0 \cdot 10^{-5}\ (\mathrm{mm}^2)$ y $s = 9.0 \cdot 10^{-3}\ (\mathrm{m/min})$. Expresa el valor numérico de este flujo en términos de las unidades (cm) y (s).

34. Aún existen lugares donde se comercia por medio del trueque, que es la forma de pagar un bien con otro bien, es decir, sin usar dinero. Si viajas a uno de esos lugares y llevas bastante arroz, porque te contaron que era muy bien cotizado, llegas y ves la siguiente tabla de equivalencias:

1 taza de arroz	8 papas
3 huevos	4 limones
1 taza de azúcar	2 kg de carne
1 kg de carne	24 huevos
1 papa	2 limones

Si te mueres por comprar dos tazas de azúcar, calcula cuántas tazas de arroz necesitas.

35. Un condominio en Los Ángeles cuesta 380,000 dólares y tiene un área de 75.0 (m^2); el techo está a 3.10 (m) de altura. Suponiendo que el volumen aproximado del condominio se puede calcular con la ecuación

$$V = A \cdot h$$

donde A es el área y h es la altura del condominio, y si el precio del condominio es proporcional al volumen.

a) ¿Cuánto cuesta 1.0 (m^3) de condominio?
b) Un posible comprador del condominio trabaja 40 horas por semana (40 (h/sem)), 50 semanas al año, con un salario anual de 60,000 dólares. ¿Cuántas horas tendría que trabajar el comprador del condominio para pagar 1.0 (m^3) del condominio?

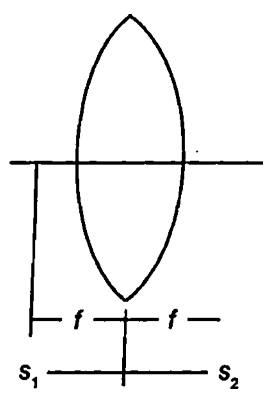
2 PROBLEMAS DE Precisión y cifras significativas

2.1 Problemas resueltos

1. Para encontrar la distancia focal f de una lente delgada, se utiliza la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}$$

donde s_1 es la distancia del objeto a la lente y s_2 es la distancia de la imagen (los números 1 de la ecuación son cantidades que no provienen de mediciones).



En un experimento se obtuvieron las siguientes mediciones:

$$s_1 = 0.82\,(\mathrm{m})$$
$$s_2 = 0.125\,(\mathrm{m})$$

Calcula la distancia focal para la lente utilizada en el experimento.

Solución

Se tiene

$$\frac{1}{f}=\frac{1}{s_1}+\frac{1}{s_2}$$

donde

$$s_1 = 0.82\,(\mathrm{m})$$
$$s_2 = 0.125\,(\mathrm{m})$$

entonces sustituyendo los valores:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{0.82} + \frac{1}{0.125}$$

haciendo la operación de la división tomando en cuenta el número de cifras significativas, tenemos:

$$\frac{1}{f} = 1.2 + 8.00$$

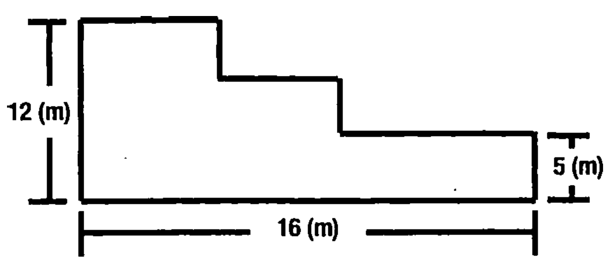
Sumando tomando en cuenta el número de cifras decimales, tenemos

$$\frac{1}{f} = 9.2$$

dividiendo tomando en cuenta el número de cifras significativas; tenemos:

$$f = 0.11\,(\mathrm{m})$$

2. Se tiene la siguiente figura:



¿Cuál es el perímetro de ella?

Solución

Observamos que el perímetro de la figura es igual al perímetro de un rectángulo de 16 (m) y 12 (m), entonces

$$p = 16 + 16 + 12 + 12 = 56\,(\mathrm{m})$$

3. Resuelve las siguientes operaciones de números que provienen de mediciones.

a) (1.25)(2.7)(12)
Solución

(1.25)(2.7)(12) = 40.5 aritméticamente, pero el resultado en física es (1.25)(2.7)(12) = 40 *b*) (78.9)(55.7)(23.6)

Solución

(78.9)(55.7)(23.6) = 103 716 aritméticamente, pero el resultado en física es (78.9)(55.7)(23.6) = 1.04×10^5.

c) 1.25+2.6+7

Solución

1.25+2.6+7 = 10.85 aritméticamente, pero el resultado en física es 1.25+2.6+7 = 11.

4. Calcula:

a) El perímetro de un triángulo de lados $a = 1.24$ (cm), $b = 2.4$ (cm) y $c = 1.81$ (cm). Muestra tu procedimiento.

Solución

El perímetro es 5.4 (cm) porque es la suma de los lados y tenemos que dejar a la cantidad con una cifra decimal.

b) El perímetro de un triángulo rectángulo de catetos $a = 3.22$ (cm) y $b = 5.4$ (cm). Muestra tu procedimiento.

Solución

Para conocer el perímetro de un triángulo hay que sumar la longitud de los tres lados, pero en este caso nos falta la de uno de ellos; sin embargo sabemos que es un triángulo rectángulo y que cumple con el teorema de Pitágoras. Usando este teorema podemos decir que

$$h = \sqrt{(3.22)^2 + (5.4)^2} = \sqrt{10.4 + 29} = \sqrt{39} = 6.2\,(\mathrm{cm})$$

siguiendo las reglas de cifras para multiplicación y de decimales para suma.

c) El área del triángulo en el inciso *b*). Muestra tu procedimiento.

Solución

El área del triángulo está dada por el producto de la base por la altura entre dos, por lo tanto el área es 8.7 (cm^2) a dos cifras.

d) La superficie de una esfera de diámetro $d = 3.12$ (cm). Muestra tu procedimiento.

Solución

La superficie de una esfera podemos conocerla con la fórmula: $4 \cdot \pi \cdot r^2$; y sabemos que el radio es la mitad del diámetro. Haciendo operaciones encontramos que la superficie de esta esfera es 30.6 (cm^2) a tres cifras.

e) El volumen de la esfera del inciso *d*). Muestra tu procedimiento.

Solución

Ahora calculamos el volumen de la misma esfera, éste está dado por $\left(\frac{4}{3}\right)\pi \cdot r^3$ de modo que nos queda 15.9 (cm^3) a tres cifras.

f) Calcula el área total de la superficie de un cilindro de altura h = 12.2 (cm) y de diámetro de la base rd = 2 (cm). Muestra tu procedimiento.

Solución

El área total es el área de la superficie curva y el área de las dos tapas del cilindro. Para calcular el área de la superficie curva tenemos que calcular primero el perímetro del círculo de la base y posteriormente multiplicarlo por la altura $2\pi rl$, esto nos da una superficie de 8×10^1 (cm^2) con una cifra. El área de cada base es $\pi r^2 = 3\,(cm^2)$. Entonces el área total es $8 \times 10^1 + 3 + 3 = 9 \times 10^1 (cm^2)$.

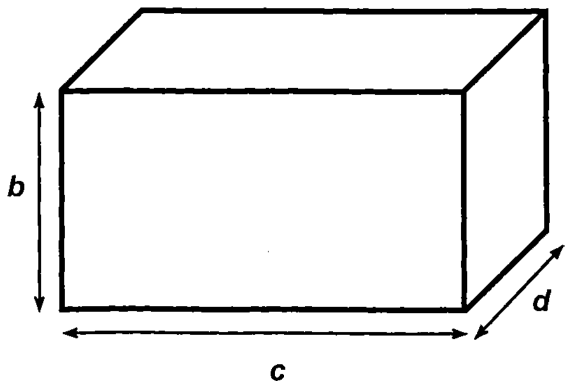
g) El volumen del cilindro del inciso *f*). Muestra tu procedimiento.

Solución

Para calcular el volumen hacemos un procedimiento similar al de la superficie, sólo que calculamos primero la superficie de la base y, como en el inciso pasado, la multiplicamos por la altura, es decir $\pi r^2 l$ y da un volumen de 4×10^1 (cm^3).

2.2 Problemas propuestos

1. Se tiene una caja con medidas de b, c y d donde b = 13.3 (cm), c = 28.12 (cm) y d = 10.214 (cm).



a) Calcula el perímetro de las tres caras que se muestran. Muestra tu procedimiento.
Respuesta: (p_f = 82.8 (cm), p_a = 76.67 (cm), p_l = 47.0 (cm)).

b) Calcula el área de las tres caras que se muestran. Muestra tu procedimiento.
Respuesta: $A_f = 374\ (cm^2), A_a = 287.2\ (cm^2), A_l = 136\ (cm^2)$).

c) Calcula el volumen de la caja. Muestra tu procedimiento.
Respuesta: ($V = 3.82 \times 10^3 (cm^3)$).

2. Realiza las siguientes operaciones explicando tu razonamiento.

a) 142.4 (m) + 2.82 (m) – 12.4 (m).
Respuesta: (132.8 (m)).

b) (5.67 (cm^3)).
Respuesta: (182 (cm^3)).

c) π (9.2 ($pulg^2$)).
Respuesta: (2.7×10^2 ($inch^2$)).

d) (34.67 (g))/(12 (cm^3)).
Respuesta: (2.9 (g/cm^3)).

3. Realiza las siguientes operaciones:

a) (0.235 (m)) (2.2 (m)) (1.255 (m)).
b) (15.67 (cm)) (4 (cm)) (12.6 (cm)).
c) (1.4×10^3(km)) (3.0×10^2 (km)) (2.75×10^3(km)).

4. Realiza las siguientes operaciones:

a) 1.0 (kg) + 5.45 (kg) + 130.555 (kg).
b) 1.001 (kg) + 2.1 (kg) + 12.42 (kg).

5. ¿Cuál es el orden de magnitud de las siguientes cantidades?

a) 6.023×10^{23}
b) 1.6×10^{-19}
c) 6.4×10^3
d) 9×10^9

6. ¿Cuántas cifras significativas tienen las siguientes cantidades?

a) 6.023×10^{23}
b) 1.6×10^{-19}
c) 6.4×10^3
d) 9×10^9

7. Calcula los volúmenes de los cuerpos siguientes utilizando los datos dados.

a) El volumen de un paralelepípedo de lados 1.2 (cm), 2.31 (cm) y 2.7 (cm).
b) Una esfera de radio 3 (m).
c) Un cilindro de radio 3.67 (m) y longitud 25 (m).
d) Una esfera hueca de radio interior 9.9 (cm) y radio exterior 9 (cm).
e) Un cilindro hueco de radio interior 9.9 (cm), radio exterior 9 (cm) y longitud 9.9 (cm).

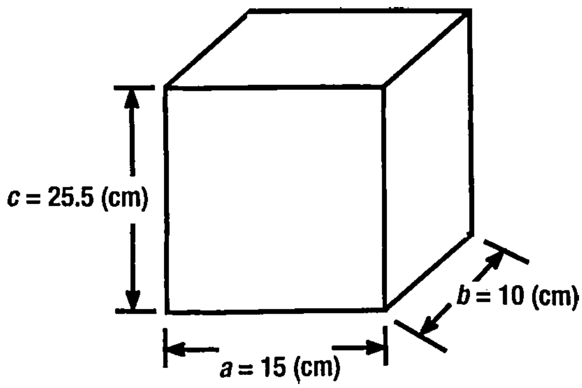
8. Una pirámide tiene una altura de 481 (pie), y su base cubre un área de 13.0 (acre); (1 (acre) = 43 560 (pie)). Si el volumen de una pirámide está dado por la expresión

$$V = \frac{1}{3} Bh$$

donde B es el área de la base y h es la altura, encuentra el volumen de esta pirámide en metros cúbicos.

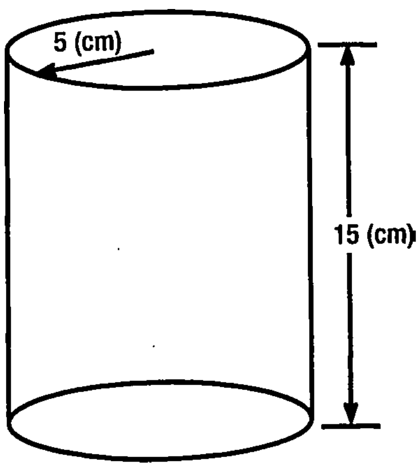
9. Se tiene una caja como la que se muestra en la siguiente figura.

Calcula:



a) El perímetro de las tres caras que se ven en la figura.
b) El área de las tres caras que se ven en la figura.

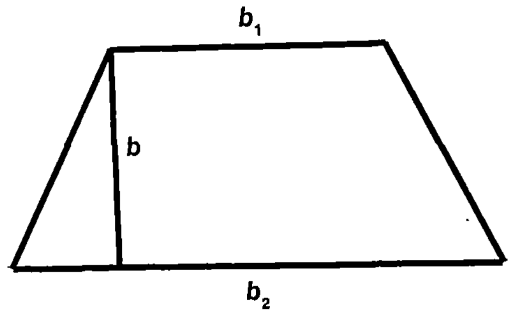
10. Se tiene un cilindro de masa m = 2.10 (kg) que se muestra en la siguiente figura



a) Calcula el área de la base.
b) Calcula su volumen.

11. El área del trapecio mostrado en la figura, es

$$A=\frac{1}{2}b(h_1+h_2)$$



Si $h_1 = 5.2$ (cm), $h_2 = 7.35$ (cm), $b = 2.42$ (cm).

Calcula:

a) Su área.
b) La longitud de su perímetro.

12. Una placa tiene las siguientes medidas

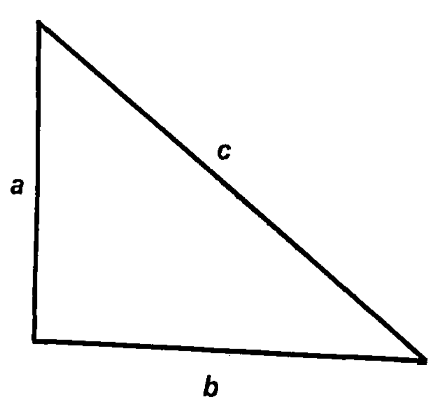
$$\text{largo} = 13.25 \pm 0.12\,(\text{m})$$

$$\text{ancho} = 18.32 \pm 0.30\,(\text{m})$$

Calcula indicando claramente la incertidumbre de la medición:

a) El área de la placa.
b) El perímetro de la placa.

13. Se tiene un triángulo rectángulo como se muestra en la figura.



Los lados miden, $a = 12.42 \pm 0.3\,(\mathrm{cm})$, $b = 15.7 \pm 0.2\,(\mathrm{cm})$ y $c = 20.0 \pm 0.3\,(\mathrm{cm})$. Calcula el perímetro y el área del triángulo usando en tus resultados la misma notación de los datos.

14. Un disquete de 1.4 (MB) tiene las siguientes dimensiones: 8.9 (cm) de largo, 9.3 (cm) de ancho y 0.3 (cm) de espesor.

a) Calcula el perímetro del disquete (largo más ancho).
b) Calcula el área del disquete.
c) Calcula el volumen del disquete.
d) ¿Cuál de estos cálculos es el que posee mayor error? Explica a qué se debe.

15. ¿Cuántos billetes de 100 pesos habría que apilar para llegar a la luna? ¿Sería más económico que construir y enviar una nave?

3 PROBLEMAS DE Densidad

3.1 Problemas resueltos

1. Cierta madera tiene una densidad superficial de $8\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}\right)$. Si se compara una tabla de esa madera, cuyo espesor es de 5 (cm), calcula la densidad volumétrica de la madera.

Solución

Sabemos que la densidad volumétrica y superficial se define como

$$\rho = \frac{m}{V}$$
$$\rho_s = \frac{m}{A}$$

Suponemos que nuestra madera tiene un área A. El volumen, entonces es $V = Ae$, donde e es el espesor (5 (cm)). La densidad será

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{Ae} = \left(\frac{m}{A}\right)\left(\frac{1}{e}\right) = \rho_s\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{\rho_s}{e}$$

entonces

$$\rho = \frac{8\,(\text{kg/m}^2)}{5\times10^{-2}\,(\text{m})} = 2\times10^2\,(\text{kg/m}^3)$$

2. Si consideramos a la Tierra como una esfera sólida y uniforme de radio R, con una masa $m_T = 5.95\cdot10^{24}$ (kg) ¿cuál debe ser su tamaño (R) para que se convierta en un agujero negro, si la densidad de un agujero negro es $\rho_{an} = 10^{19}\left(\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)$?

Solución

La densidad del agujero negro es $\rho_{ab} = \frac{m_T}{V}$

donde el volumen de una esfera es

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

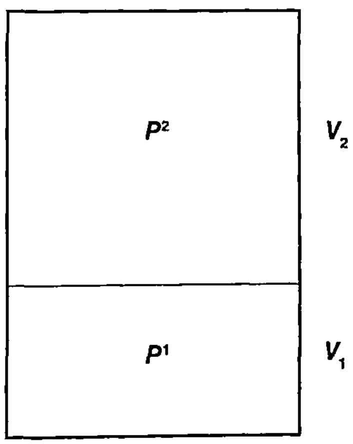
sustituyendo V en la densidad y despejando R tenemos

$$R = \left(\frac{3m_T}{4\pi\rho_{an}}\right)^{1/3}$$

dando los valores calculamos R con cero cifras significativas ya que la densidad está dada con cero cifras significativas.

$$R = 10^2\ (\text{m})$$

3. Calcula la densidad media de una mezcla de aceite (ρ_2, V_2) y agua (ρ_1, V_1).



¿Qué pasa si $V_1 = V_2$?

Solución

La densidad es la masa total sobre el volumen total.

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V_1 + V_2}$$

además

$$m_1 = \rho_1 V_1$$
$$m_2 = \rho_2 V_2$$

tenemos que la densidad media es $\rho = \dfrac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}$

Ahora, si $V_1 = V_2$, entonces

$$\rho = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_1}{V_1 + V_1} = \frac{V_1(\rho_1 + \rho_2)}{2V_1}$$

La densidad media para este caso es:

$$\rho = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$$

4. Una hoja de papel tiene una densidad superficial de 60.0 (g/m^2).

a) Escribe con tus propias palabras qué significa la cantidad 60.0 (g/m^2) sin mencionar la palabra densidad.

Solución

Significa que cada metro cuadrado de este papel tiene una masa de 60 g.

b) Calcula la masa que debe tener 3.25 (m^2) de la hoja sin usar la ecuación de densidad superficial. Explica claramente tu razonamiento.

Solución

Siguiendo un razonamiento similar al de la pregunta anterior vemos que si en un metro cuadrado hay una masa de 60 gramos, en tres metros cuadrados hay una masa de 180 gramos. Además en un cuarto de metro cuadrado hay un cuarto de 60 gramos de masa, es decir, 15 g. En total tenemos 195 gramos.

c) Calcula el área que tendría una hoja de 150 (g) de masa sin usar la ecuación de densidad superficial. Explica claramente tu razonamiento.

Solución

Sabemos que en un metro cuadrado hay 60 gramos, por lo tanto en dos metros cuadrados hay 120 gramos. Lo que queremos saber es cuántos metros cuadrados tiene una hoja con masa de 150 gramos, así que está cerca de los dos metros cuadrados, que tienen una masa de 120 gramos; podemos ver que faltan sólo 30 gramos y es fácil también ver que 30 es la mitad de 60 gramos que es la masa en un metro cuadrado de hoja. Por lo tanto, si tenemos dos y medio metros cuadrados tenemos una masa de 150 gramos que es lo que estábamos buscando.

3.2 Problemas propuestos

1. Un investigador obtiene las siguientes mediciones de masa y volumen de una muestra.

Masa (g)	2.21	2.20	2.24	2.23	2.21	2.22	
Volumen (cm^3)	1.8	1.6	1.4	1.5	1.4	1.6	1.7

a) ¿Cuál es la masa de la muestra? Expresa tu respuesta usando la notación: número ± incertidumbre. Muestra tu procedimiento.
Respuesta: (2.22 ± 0.02 (g)).

b) ¿Cuál es la masa de la muestra? Expresa tu respuesta usando la notación: número ± porcentaje. Muestra tu procedimiento.
Respuesta: (2.22 ± 0.90% (g)).

c) Usando los datos, calcula el valor máximo y el valor mínimo de densidad. Muestra tu procedimiento.

Respuesta: $\rho_{\text{máx}} = 1.6\ \text{g/cm}^3$), $\rho_{\text{mín}} = 1.2\,\text{g/cm}^3$)).

d) ¿Cuál es la densidad de la muestra? Expresa tu respuesta usando la notación donde el último dígito es la incertidumbre. Muestra tu procedimiento.
Respuesta: ($\rho(\text{g/cm}^3)$).

2. Cierto cable tiene una densidad lineal de 12 (g/m).

a) Escribe con tus propias palabras qué significa la cantidad 12 (g/m) sin mencionar la palabra densidad.

b) Calcula la masa que debe tener 4.5 (m) del cable sin usar la ecuación de densidad. Explica claramente tu razonamiento.
Respuesta: (54 (g)).

c) Calcula la longitud que deben tener 30 (g) de cable sin usar la ecuación de densidad. Explica claramente tu razonamiento.
Respuesta: (2.5 (m)).

d) Se toma un trozo del cable y se encuentra que su diámetro es 1.2 (mm). Calcula la densidad volumétrica del cable. Muestra tu procedimiento. **Nota:** No necesitas saber el tamaño del cable para contestar esta pregunta.
Respuesta: $\left(\rho = 1.1 \times 10^4\ (\text{kg/m}^3)\right)$.

3. En una fábrica de dados se usa un plástico con una densidad de 1.80 (g/cm^3); los dados miden 1.60 (cm) por lado.

a) ¿Cuál es la masa de cada dado?
Respuesta: (7.37 (g)).

b) Para ahorrar material se inyecta aire y quedan burbujas dentro de los dados. ¿Cuánto material se ahorra si los dados inyectados tienen una masa de 3.126 (g)?
Respuesta: (2.36 (cm^3)).

c) Si se encuentra que las burbujas tienen un radio de 0.40 (mm), ¿cuántas burbujas hay en cada dado?
Respuesta: (aproximadamente 8.8×10^3 burbujas).

4. Para fabricar bronce se mezcla cobre y fierro; dependiendo de las cantidades de cada uno es diferente la calidad del bronce. Sabemos que la densidad del cobre es 3.50 (g/cm^3) y la densidad del fierro es 7.80 (g/cm^3).

a) Cuando formemos bronce, ¿su densidad es mayor, menor o igual a la del cobre? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (mayor).

b) Si los mezclamos con iguales masas, ¿cuál es la densidad de la mezcla? Muestra tu procedimiento.
Respuesta: (4.83 (g/cm^3)).

c) Si mezclamos 40.0 (cm^3) de fierro con 27.0 (cm^3) de cobre, ¿cuál es la densidad de la mezcla? Muestra tu procedimiento.
Respuesta: (6.07 (g/cm^3)).

d) Si mezclamos 14.0 (g) de fierro con 21.0 (g) de cobre, ¿cuál es la densidad de la mezcla? Muestra tu procedimiento.
Respuesta: (4.49 (g/cm^3)).

e) Si los mezclamos en iguales volúmenes, ¿cuál es la densidad de la mezcla? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (5.65 (g/cm^3)).

5. La masa del protón es $1.673 \times 10^{-27}(\text{kg})$ y puede ser considerado como una esfera de radio $1.35 \times 10^{-15}(\text{m})$. Determina su densidad y compárala con la densidad de los sólidos y de los planetas.

6. La densidad del núcleo atómico es aproximadamente 2×10^{17}. ¿Cuál sería el radio de la Tierra si tuviera esta densidad?

7. Investiga la masa y el radio de Sol. Con esos datos calcula su densidad promedio y compáralo con los planetas.

8. ¿Cuál es la densidad superficial que tiene una hoja de oro de 20 (μm) de espesor?

9. Un alambre de plata de densidad lineal 7.42×10^{-3} (g/cm) tiene una masa de 100 (g). ¿Cuál es su diámetro?

10. Un cascaron esférico de radio 5 (cm) tiene una masa de 0.5 (kg). ¿Cuál es su densidad superficial?

11. Si determinas que la masa un tubo de poco espesor es de 1(kg) y su longitud de 0.5 (m). Si su densidad superficial es de 6.4 (kg/m), calcula el radio del tubo.

12. ¿ Cuál es la cantidad máxima de gasolina ($\rho = 0.70$ (gr/cm^3)) que puede contener un tambor de 200(lt)?

13. Una esfera de radio $a = 0.20$ (m) tiene un hueco esférico concéntrico de radio $b = 0.05$ (m). Si la esfera tiene una masa de 2.25 (kg), ¿cuál es su densidad?

14. Un vaso de aluminio tiene una masa de 100 (g). ¿Cuál es su volumen? ¿puedes indicar qué tanto líquido es capaz de almacenar?

15. La masa de Saturno es 5.69×10^{26} (kg), y su radio 6.03×10^{7} (m).

a) Investiga cómo se calcula el volumen de una esfera de ese radio.
b) Calcula la densidad media de ese planeta.

Supongamos que Saturno es un plantea uniforme, es decir, la densidad que calculaste es válida para cualquier trozo de material tomado de ese plantea. Imagínate que construimos un objeto con el material de Saturno, ¿flotaría en el agua?

16. Un fabricante especifica que sus hojas de papel tamaño carta $(216(\mathrm{mm}) \times 279(\mathrm{mm}))$ son de 80 (g/m^2).

a) Calcula la densidad del papel si el espesor de cada hoja es de 20×10^{-6} (m).
b) Con estas mismas hojas de papel se hacen tiras de 0.010 (m) de ancho. Calcula la densidad lineal de estas tiras de papel.

17. Si la plata cuesta 150 dólares por kilogramo, ¿cuánto mide el radio de una esfera de plata de un millón de dólares? La densidad de la plata es de 10.5×10^{3} (kg/m^3).

18. Cierto matraz calibrado tiene masa de 25.0 (g) cuando está vacío, 75.0 (g) cuando se llena con agua y 88.0 (g) cuando se llena con glicerina. Encuentra la densidad relativa de la glicerina.

19. Si te muestran un pedazo de metal y te aseguran que es oro puro, ¿qué podrías hacer para determinar si te quieren engañar?

20. Tienes dos latas de Coca Cola, una normal y otra dietética. ¿Cual crees que tiene menor densidad? ¿Qué experimento podrías realizar para comprobar tu suposición? Calcula la densidad promedio de cada lata con respecto a su líquido en el interior.

21. Supongamos que quieres construir con acero una bola hueca de 1 (m) de radio exterior que flote en el agua. ¿Cuál debe ser el mínimo radio interior de la bola para que esto pueda ocurrir?

4 PROBLEMAS DE Ángulos y trigonometría

4.1 Problemas resueltos

1. Usando las identidades trigonométricas del capítulo, demuestre que:

a) $\operatorname{sen}(2\theta) = 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)$.

Solución

$$\operatorname{sen}(2\theta) = \operatorname{sen}(\theta+\theta) = \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) + \operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta) = 2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta).$$

b) $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$.

Solución

$$\cos(-\theta) = \cos(0-\theta) = \cos(0)\cos(\theta) + \operatorname{sen}(0)\operatorname{sen}(\theta) =$$
$$(1)\cos(\theta) + (0)\operatorname{sen}(0) = \cos(\theta)$$

2. Reduce a ángulo agudo las siguientes operaciones:

a) $\operatorname{sen}(125°)$.

Solución

$$\operatorname{sen}(125°) = \operatorname{sen}(90°+35°) = \operatorname{sen}(90°)\cos(35°) + \cos(90°)\operatorname{sen}(35°) =$$
$$(1)\cos(35°) + (0)\operatorname{sen}(35°) = \cos(35°)$$

b) $\cos(320°)$.

Solución

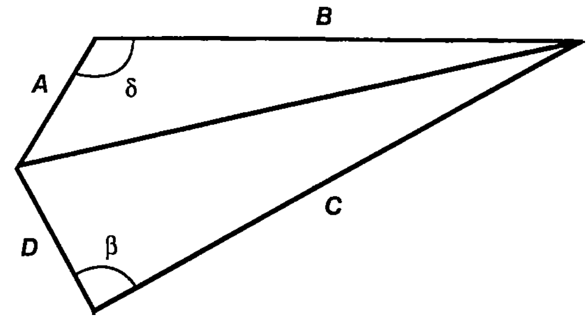
$$\cos(320°) = \cos(360° - 40°) = \cos(360°)\cos(40°) + \operatorname{sen}(360°)\cos(40°) =$$
$$(1)\cos(40°) + (0)\operatorname{sen}(40) = \cos(40°)$$

c) $\sec(210°)$

Solución

$$\sec(210°) = \frac{1}{\cos(210°)} = \frac{1}{\cos(180°+30°)} = \frac{1}{\cos(180°)\cos(30°) - \operatorname{sen}(180°)\operatorname{sen}(30°)} =$$
$$\frac{1}{(0)\cos(30°) - (1)\operatorname{sen}(30°)} = -\frac{1}{\operatorname{sen}(30°)} = -\csc(30°)$$

3. Se tiene la siguiente figura. Se conoce $A = 3.4$ (cm), $B = 5.2$ (cm), $C = 7.6$ (cm), $D = 3.8$ (cm), y $\beta = 56°$.



Calcula δ. Muestra tu procedimiento.

Solución

Calculamos primero la longitud de la línea que divida a la figura. Llamaremos E a esa longitud. Usaremos la ley de cosenos

$$E^2 = D^2 + C^2 - 2DC\cos\beta$$

$$E = \sqrt{D^2 + C^2 - 2DC\cos\beta}$$

$$E = \sqrt{(3.8)^2 + (7.6)^2 - 2(3.8)(7.6)\cos(55°)} = 6.2\,\text{cm})$$

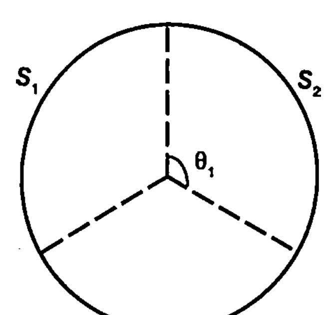
Ahora calculamos el ángulo δ con la ley de cosenos

$$E^2 = A^2 + B^2 - 2AB\cos\delta$$

$$\cos\delta = \frac{A^2 + B^2 - E^2}{2AB} = \frac{(3.4)^2 + (5.2)^2 - (6.2)^2}{2(3.4)(5.2)} = -0.013$$

$$\delta = 91°$$

4. Dado que conocemos que $s_1 = s_2$ y la longitud de la circunferencia es $4s_3$;



a) ¿Cuánto vale s_3, en función de s_1?
Solución

Tenemos que

$$s_1 + s_2 + s_3 = 4s_3$$
$$s_1 + s_1 + s_3 = 4s_3$$

ya que $s_1 = s_2$. Entonces despejamos s_3

$$2s_1 = 3s_3$$

b) Si el radio de círculo es R, ¿cuál es el valor del ángulo θ_1? (Debes dar un valor numérico).
Solución

$$\theta_1 = \frac{s_1}{R} = \frac{\frac{3}{2}s_3}{R} = \frac{3}{2}\left(\frac{s_3}{R}\right)$$
$$= \frac{3}{2}\left(\frac{4s_3}{4R}\right) = \frac{3}{8}\left(\frac{4s_3}{R}\right)$$
$$= \frac{3}{8}(2\pi) = \frac{3}{4}\pi$$

c) Si aumenta el radio del círculo al doble, ¿cuál es el nuevo valor de θ_1?
Solución

El mismo.

5. **Radianes.**

a) ¿Cuánto es un radián en grados?
Solución

$$1\,(\text{rad})\frac{180^\circ}{\pi(\text{rad})} = 57.3^\circ$$

b) ¿Cuántos radianes es un grado?
Solución

$$1^\circ\,\frac{\pi(\text{rad})}{180^\circ} = 0.0175\,(\text{rad})$$

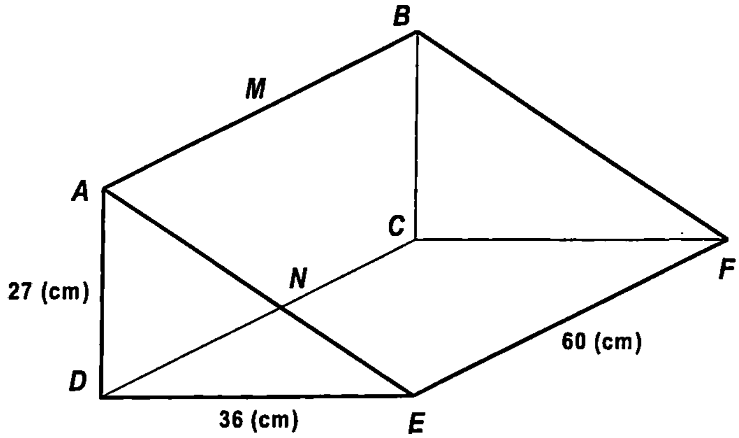
c) Si el radio de un círculo es de 2.4 (m), ¿cuál es la longitud del arco que subtiende un radián?
Solución

Por definición la longitud de arco es de un radio, es decir, 2.4 (m).

d) Si el radio de un círculo es de 2.4 (m), ¿cuál es la longitud del arco que subtiende un grado?
Solución

$$s = R\theta = (2.4\,(\text{m}))(0.0175\,(\text{rad})) = 0.042\,(\text{m}) = 4.2\,(\text{cm})$$

6. En la rampa que se muestra, M es el punto medio entre A y B; N es el punto medio entre D y C.



a) Encuentra el ángulo entre el plano ABFE y la base CDEF.
Solución

Para analizar este problema, podemos ver la rampa de lado y nos damos cuenta de que el ángulo que se forma entre el segmento AE y el segmento DE, es el mismo que se forma entre la base y el plano que se pide. Para encontrar el ángulo entre los segmentos, pensamos de nuevo en la tangente del ángulo que buscamos. Y vemos que tenemos los dos catetos necesarios para saber la tangente, y ahora como lo que nos interesa es el ángulo, hacemos la operación inversa a la tangente, de modo que nos queda $\theta = \tan^{-1}(27/36)$ que es 37°.

b) Encuentra el ángulo entre el segmento AF y la base CDEF.
Solución

Ahora queremos encontrar el ángulo entre el segmento AF y la base CDEF. Para esto calculamos la longitud de la diagonal DF, usando el teorema de Pitágoras ($DF^2 = EF^2 + DE^2$) y los lados de 60 (cm) y 36 (cm); esto nos da 70 (cm). Ahora podemos visualizar un triángulo rectángulo ADF con AD de 27 (cm) y DF de 70 (cm) que calculamos. Haciendo un razonamiento similar al del inciso anterior encontramos que $\theta = \tan^{-1}(27/70)$ lo que resulta en un ángulo de 21°.

c) Encuentra el ángulo entre los segmentos FM y MD.
Solución

Para encontrar el ángulo entre los segmentos FM y MD usamos la ley de cosenos, pero necesitamos las longitudes de los tres lados del triángulo FMD antes de poder despejar el ángulo. Para calcular la longitud de MD usamos el teorema de Pitágoras en el triángulo MND porque MD es la hipotenusa, y los catetos son MN de 27 (cm) y ND de 30 (cm) (la mitad de 60 (cm)). Esto nos da que MD es 40 (cm). Para calcular la longitud de FM calculamos primero la longitud de la rampa con el triángulo rectángulo FBC que se ve desde un lado con catetos CF de 36 (cm) y CB de 27 (cm); esto nos da 45 (cm).

Con este resultado calculamos la longitud de FM con el triángulo rectángulo FMB con catetos BM de 30 (cm) (de F a la mitad de FE) y FM de 45 (cm); esto nos da 54 (cm). Con este resultado y la longitud de DF que ya habíamos calculado en *b*) que era de 70 (cm), podemos usar la ley de cosenos en el triángulo FMD con un lado MD de 40 (cm) otro FM de 54 (cm) y el opuesto al ángulo DF de 70 (cm) y sin despejar nos queda: $70^2 = 40^2 + 54^2 - 2(40)(54)\cos(\theta)$ que al hacer algunas operaciones y despejar, nos queda $\theta = \cos^{-1}(-341/4371)$ que finalmente nos da $\theta = 94°$.

d) Encuentra el ángulo entre los segmentos NE y EB.

Solución

Para calcular el ángulo entre los segmentos NE y EB usaremos la misma ley de cosenos, pero primero tenemos que calcular la longitud de NE con el teorema de Pitágoras en un triángulo rectángulo NDE con catetos DE de 36 (cm) y ND de 30 (cm), lo que nos da 47 (cm). El segmento NB tiene la misma longitud que el segmento MD que ya habíamos calculado; esto lo podemos ver porque los triángulos que las forman son iguales, y su longitud es 40 (cm). Ahora para calcular la longitud de BE hacemos un análisis un poco más detallado de la figura y vemos que el ángulo que éste forma con el plano es el mismo que forma el segmento AF, que habíamos calculado de 21°; y podemos ver que el segmento BE es la hipotenusa de un triángulo rectángulo BCE con BC de 27 (cm). Usando la relación del seno como cateto opuesto dividido entre hipotenusa podemos despejar el segmento BE y nos queda $BE = 27/\text{sen}(21°) = 75$ (cm). Ahora sí, tenemos un triángulo BNE con un lado BE de 75 (cm), otro lado NE de 47 (cm) y otro lado opuesto al ángulo que nos interesa BN de 40 (cm). La ley de cosenos nos queda: $40^2 = 75^2 + 47^2 - 2(75)(47)\cos(\theta)$, de donde despejando nos queda $\theta = 28°$.

7. Reducción de ángulo agudo.

Vamos a reducir a ángulo agudo el coseno de 215°. Observa que 215 se puede expresar como 180 + 35 o también como 270 − 55.

a) Reduce usando la primera expresión. Muestra tu procedimiento.

Solución

Partiremos de la identidad $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \text{sen}(x)\text{sen}(y)$ donde para nosotros x será 180° y y será 35°. Entonces,

$$\begin{aligned}\cos(215°) &= \cos(180° + 35°)\\ &= \cos(180°)\cos(35°) - \text{sen}(180°)\text{sen}(35°)\\ &= (-1)\cos(35°) - (0)\text{sen}(35°)\\ &= -\cos(35°)\end{aligned}$$

hay que ver que coseno de 180° es −1 y seno de 180 es cero.

b) Ahora redúcelo usando la segunda expresión. Muestra tu procedimiento.

Solución

Partiremos de la identidad $\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$ donde para nosotros x será 270° y y será 55°. Entonces,

$$\begin{aligned}\cos(215°)&=\cos(270°-55°)\\&=\cos(270°)\cos(55°)+\operatorname{sen}(270°)\operatorname{sen}(55°)\\&=(0)\cos(55°)+(-1)\operatorname{sen}(55°)\\&=-\operatorname{sen}(55°)\end{aligned}$$

Usamos la misma ecuación, pero ahora hay que fijarse que seno de 270 es −1 y coseno de 270 es cero.

c) ¿Por qué existen dos respuestas para la misma reducción a ángulo agudo en los incisos *a*) y *b*)?

Solución

Existen dos respuestas porque el seno y el coseno, si las vemos como relaciones de un triángulo rectángulo, se refieren a los catetos y la hipotenusa. Si tenemos que A y B son los ángulos de un triángulo rectángulo, el coseno de A es el cateto adyacente entre la hipotenusa. El coseno de B es el cateto opuesto sobre hipotenusa. Resulta que el cateto adyacente de A es el mismo que el cateto opuesto de B. Además $A + B$ es 90°, es decir $\operatorname{sen}(90°-\theta)=\cos(\theta)$.

d) Reduce a ángulo agudo tan(173°). Muestra tu procedimiento.

Solución

Para reducir a ángulo agudo una tangente, primero hay que expresarla como seno entre coseno y luego usar las identidades conocidas. Esto lo haremos también expresando 173° como 90° + 83° con el cuidado de expresar tanto el seno como el coseno de la misma forma. Esto queda:

$$\tan(173°)=\frac{\operatorname{sen}(90°+83°)}{\cos(90°+83°)}=\frac{\operatorname{sen}(90°)\cos(83°)+\cos(90°)\operatorname{sen}(83°)}{\cos(90°)\cos(83°)-\operatorname{sen}(90°)\operatorname{sen}(83°)}$$

ahora, sabemos que seno de 90° es 1 y cos de 90° es 0, simplificando nos queda $\frac{\cos(83°)}{-\operatorname{sen}(83°)}$ que simplificando aún más vemos que es $\frac{-1}{\tan(83°)}=-\cot(83°)$.

e) Demuestra que $\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\operatorname{sen}^2(\theta)$. Muestra tu procedimiento.

Solución

Para demostrar que $\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\operatorname{sen}^2(\theta)$ sólo tenemos que usar la identidad para el coseno pensando en que 2θ es igual a $\theta+\theta$, es decir: $\cos(\theta+\theta)=\cos(\theta)\cos(\theta)-\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\theta)$ donde podemos ver claramente las multiplicaciones de términos que resultan en: $\cos(\theta)^2-\operatorname{sen}(\theta)^2$.

f) Demuestra que $\operatorname{sen}(2\theta)=2\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)$. Muestra tu procedimiento.

Solución

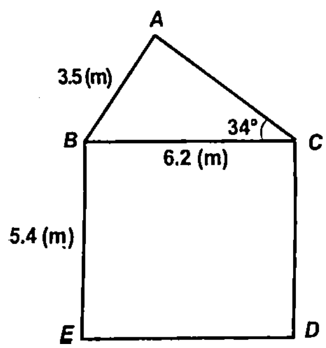
En la demostración de que $\text{sen}(2\theta)=2\text{sen}(\theta)\cos(\theta)$ usamos un procedimiento similar, sólo que con la identidad de seno, lo que nos queda $\text{sen}(\theta+\theta)=\text{sen}(\theta)\cos(\theta)+\text{sen}(\theta)\cos(\theta)$. Donde resulta evidente la suma de los dos términos de la derecha y llegamos al resultado deseado: $\text{sen}(\theta+\theta)=2\text{sen}(\theta)\cos(\theta)$.

4.2 Problemas propuestos

1. Los toreros saben que hay una distancia a la que el toro no los ve, que es donde se cruzan las líneas de visión de ambos ojos; ellos saben que se intersectan con un ángulo de 20° aproximadamente y saben también que los ojos del toro están separados 25 (cm). ¿A qué distancia puede tranquilamente pararse el torero sin ser siquiera visto por el toro? Explica tu razonamiento y muestra tu procedimiento.

Respuesta: (72 (cm)).

2. Tomando en cuenta la figura:



a) Encuentra el ángulo que hace el segmento AB con el segmento horizontal BC.
Respuesta: (64°).

b) Calcula la distancia más corta entre el punto A y el segmento DE.
Respuesta: (8.6 (m)).

c) Calcula la distancia que hay entre el punto E y el punto medio del segmento AC.
Respuesta: (9.4 (m)).

3. En una pista circular Juan corre en un carril que se encuentra a un radio de 64.0 (m) del centro. Sonia corre en otro carril que se encuentra a un radio de 70.0 (m) del centro.

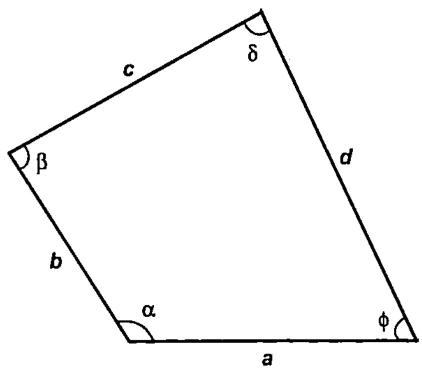
a) Si Juan y Sonia van recorriendo la misma distancia por unidad de tiempo, ¿quién de los dos va barriendo mayor ángulo por unidad de tiempo? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (Juan).

b) Si Juan y Sonia van barriendo el mismo ángulo por unidad de tiempo, ¿quién de los dos va recorriendo mayor distancia por unidad de tiempo? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (Sonia).

c) Si cada uno recorre 200 (m), ¿cuál es el ángulo que barre cada uno? Explica tu razonamiento. *Respuesta:*($\alpha_j = 3.12\,(\text{rad}),\ \alpha_s = 2.86\,(\text{rad})$).

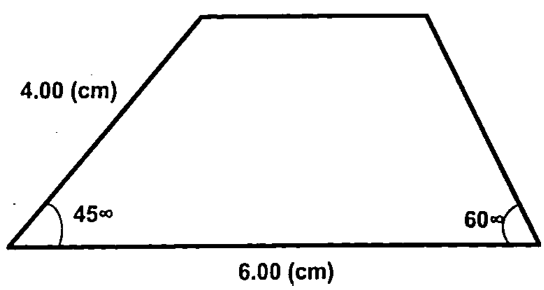
d) Si recorren un ángulo de 2.50 (rad), ¿qué distancia barre cada uno? Explica tu razonamiento. *Respuesta:*($s_j = 160\,(\text{m}), s_s = 175\,(\text{m})$).

4. En la siguiente figura los lados son $a = 50.0$ (cm), $b = 30.0$ (cm), $c = 60.0$ (cm) y $d = 52.0$ (cm). Si $\alpha = 120^o$ calcula los otros tres ángulos interiores de la figura, β, δ y ϕ.
Respuesta: $(\beta = 84.6^o, \delta = 77^o, \phi = 78.4^o)$.



5. En la siguiente figura la línea de 6.00 (cm) es paralela a la línea de la parte superior. Encuentra el área mostrando claramente tu procedimiento.

Respuesta: $\left(A = 10.7\,(\text{cm}^2)\right)$.



6. Reduce a ángulo agudo las siguientes operaciones.

a) sen(300°) *Respuesta:* (−cos30°).
b) cos(280°) *Respuesta:* (cos80°).
c) tan(130°) *Respuesta:* (−tan50°).
d) csc(200°) *Respuesta:* (−sec70°).
e) sec(125°) *Respuesta:* (−sec55°).
f) cot(100°) *Respuesta:* (−cot80°).
g) Reduce a ángulo agudo cos(305°) usando la identidad de la suma de ángulos. *Respuesta:* (sen35°).
h) Reduce a ángulo agudo cos(305°) usando la identidad de la resta de ángulos. *Respuesta:* (cos55°).

i) Compara tus respuestas de los incisos *g*) y *h*).
Respuesta: (son iguales).

7. Una pelota amarrada a una cuerda de 1.0 (m) de largo está dando vueltas. Si en total viaja 20.0 (m), ¿qué ángulo recorrió?, ¿cuántas vueltas dio?

8. Un atleta quiere entrenar corriendo 5.0 (km). La pista es circular con radio, $R = 50$ (m). ¿Cuántas vueltas tiene que dar el atleta para correr la distancia que quiere?

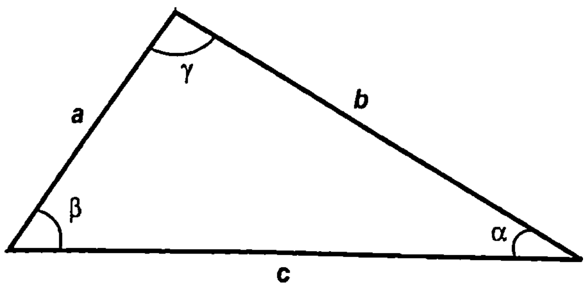
9. ¿Cuál es ángulo total recorrido por las manecillas del horario y el minutero de un reloj desde las 8:15 a las 10:35 a.m.?

10. La galaxia de Andrómeda es un gran conjunto de estrellas en espiral que tiene una masa equivalente a 300 mil millones de soles. En el cielo el ángulo que subtiende es de 4.1° aunque su diámetro es de 1.5×10^{21} (m). Calcular qué tan lejos está.

11. Sabiendo que el área de un triangulo es

$$\frac{1}{2}\cdot \text{base}\cdot \text{altura}$$

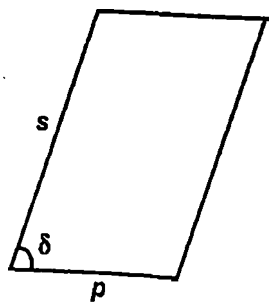
demuestra que el área del triángulo mostrado en la siguiente figura



es

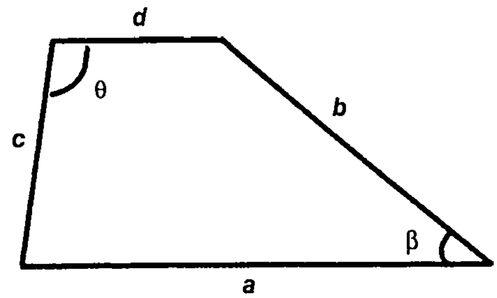
$$A = \frac{1}{2}\cdot a\cdot c\cdot \text{sen}\beta$$

12. En el siguiente paralelogramo $s = 8.0$ (cm), $p = 5.3$ (cm) y $\delta = 71^{\circ}$.



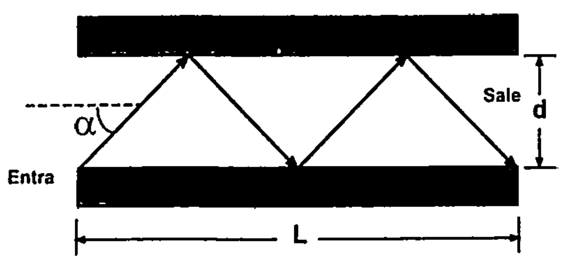
Calcula la longitud de cada una de las diagonales y el ángulo que hacen estas diagonales con p.

13. En la siguiente figura los lados $a = 10.2$ (cm), $b = 7.38$ (cm), $c = 5.31$ (cm) y $d = 3.76$ (cm). Si $\theta = 102^\circ$ calcula β.

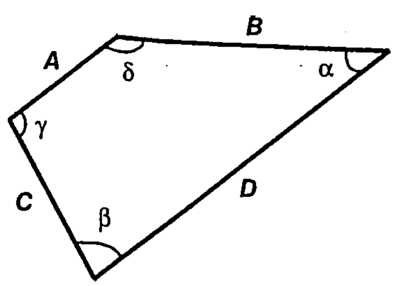


14. Considerando que un rayo luminoso entra por el lado izquierdo del tubo mostrado en la figura, rebota con el mismo ángulo con el que incide y sale después de rebotar 3 veces.

a) ¿Cuál es la longitud total del rayo luminoso desde que entra hasta que sale?
b) ¿Cuál es la longitud del tubo (L)? **Nota:** los datos del problema son a y d.



15. Se tiene la siguiente figura



Se conocen A, B, C, D y β. Calcula α, γ y δ en función de los datos conocidos.

16. Al usar la ley de senos tienes que tener cuidado con lo siguiente: El seno de 60° y 120° es el mismo, 0.87. Si calculas el seno inverso de 0.87 en tu calculadora el resultado es 60°, ¿cómo sabes cuál es la respuesta correcta?

17. Demuestra que la ley de Pitágoras es un caso particular de la ley de cosenos.

18. Escribe con palabras y sin usar ninguna literal la ley de senos.

19. Escribe con palabras y sin usar ninguna literal la ley de cosenos.

20. Usando las identidades trigonométricas del capítulo, demuestra que:

a) $\cos(2\theta) = \cos^2\theta - \text{sen}^2\theta$.
b) $\cos(-\theta) = \cos\theta$.
c) $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\theta$.

d) $\text{sen}^2\theta = \frac{1}{2}[1 - \cos(2\theta)]$.

e) $\cos^2\theta = \frac{1}{2}[1 + \cos(2\theta)]$.

21. Reduce el ángulo agudo las siguientes expresiones:

a) $\text{sen}(135^\circ)$.
b) $\cos(160^\circ)$.
c) $\tan(200^\circ)$.
d) $\text{sen}(265^\circ)$.
e) $\cos(275^\circ)$.
f) $\tan(300^\circ)$.

22. Reduce a ángulo agudo las siguientes expresiones:

a) $\text{sen}(125^\circ)$.
b) $\cos(125^\circ)$.
c) $\tan(125^\circ)$.
d) $\text{sen}(225^\circ)$.
e) $\cos(225^\circ)$.
f) $\tan(225^\circ)$.
g) $\text{sen}(330^\circ)$.
h) $\cos(330^\circ)$.
i) $\tan(330^\circ)$.

23. Reduce a ángulo agudo las siguientes expresiones:

a) $\csc(140^\circ)$.
b) $\sec(150^\circ)$.
c) $\cot(210^\circ)$.
d) $\csc(260^\circ)$.
e) $\sec(280^\circ)$.
f) $\cot(310^\circ)$.

24. Reduce a ángulo agudo las siguientes expresiones:

a) $\text{sen}(1.5\pi)$.

b) $\cos(0.75\pi)$.

c) $\tan(\pi)$.

25. Tenemos $\text{sen}(228^\circ)$.

a) Reduce a ángulo agudo usando la identidad de suma de ángulos.
b) Reduce a ángulo agudo usando la identidad de resta de ángulos.
c) Compara tus respuestas.

26. Tenemos $\cos(228^\circ)$.

a) Reduce a ángulo agudo usando la identidad de suma de ángulos.
b) Reduce a ángulo agudo usando la identidad de resta de ángulos.
c) Compara tus respuestas.

5 PROBLEMAS DE Movimiento

5.1 Problemas resueltos

1. ¿Cuál de las siguientes cuatro tablas representa una función? Construye una gráfica de la función.

a)

t (s)	x (m)
1	0
1	1
3	3
5	5
8	7
9	9
12	14

b)

t (s)	x (m)
0	1
2	4
3	6
3	7
9	5
6	4
7	1

c)

t (s)	x(m)
0	3
2	1
3	1
5	1
5	1
6	1
7	3

d)

t (s)	x (m)
0	1
1	1
3	3
4	5
4	7
6	9
7	14

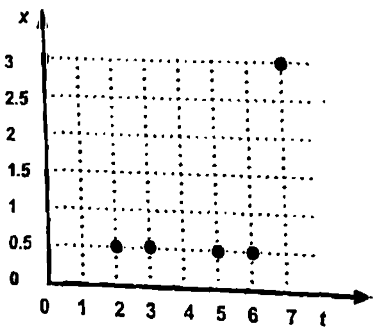
Solución

a) No puede representar una función ya que para t = 1 (s) x puede tomar dos valores 0 (m) y 1 (m).

b) No puede representar una función ya que para t = 3 (s) x puede tomar dos valores 6 (m) y 7 (m).

c) Sí puede representar a una función ya que para cada t existe sólo una x.

d) No puede representar una función ya que para t = 4 (s) x puede tomar dos valores 5 (m) y 7 (m).



2. El movimiento de una partícula está descrito por la siguiente ecuación

$$x(t) = 2.0\left(\frac{m}{s^3}\right)t^3 - 3.0\left(\frac{m}{s}\right)t + 2.0(m)$$

donde el tiempo está medido en (s).

a) Encuentra la posición de la partícula en $t = 3.0$ (s).

Solución

$$\begin{aligned} x(3.0) &= 2.0(3.0)^3 - 3.0(3.0) + 2.0 \\ &= 54 - 9.0 + 2.0 \\ &= 47 \ (m) \end{aligned}$$

b) Encuentra la posición de la partícula en $t = 3.0$ (s).

Solución

$$\begin{aligned} x(5.0) &= 2.0(5.0)^3 - 3.0(5.0) + 2.0 \\ &= 2.5\times10^2 - 15 + 2.0 \\ &= 2.4\times10^2 \ (m) \end{aligned}$$

c) Encuentra la posición de la partícula en $t = 3.0$ (s) y $t = 5.0$ (s).

Solución

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &= \frac{x(5.0) - x(3.0)}{5.0 - 3.0} \\ &= \frac{2.4\times10^2 - 47}{2.0} \\ &= 96 \ (m/s) \end{aligned}$$

d) Encuentra la posición de la partícula en $t = 3.0$ (s) y $t = 4.0$ (s).

Solución

$$\begin{aligned} v_m &= \frac{\Delta x}{\Delta t} \\ &= \frac{x(4.0) - x(3.0)}{4.0 - 3.0} \\ &= \frac{1.1\times10^2 - 47}{1.0} \\ &= 71 \ (m \cdot s) \end{aligned}$$

c) Encuentra la posición de la partícula en $t = 3.0$ (s) y $t = 3.5$ (s).

Solución:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

$$= \frac{x(3.5) - x(3.0)}{3.5 - 3.0}$$

$$= \frac{77 - 47}{0.5}$$

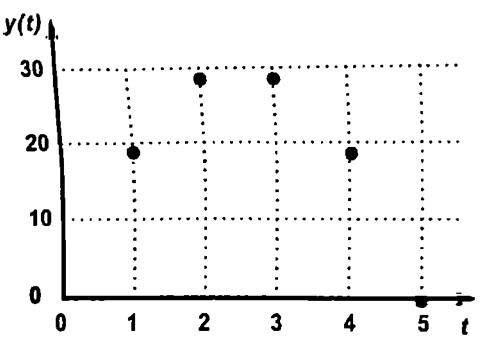
$$= 60 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

3. En la tabla siguiente se da la altura de un objeto (piedra) para diferentes tiempos:

t (s)	*x (m)*
0	0
1.0	19.6
2.0	29.4
3.0	29.4
4.0	19.6
5.0	0

a) Construye una gráfica (altura *vs*. tiempo) en base a la tabla.

Solución



b) Explica qué pasa con la velocidad de la piedra. ¿Cómo evoluciona?

Solución

En base a la información de los puntos dados y a la gráfica, podemos observar que en el intervalo de tiempo de 0.0 a 1.0 (s), la partícula avanza 19.6 (m); en el intervalo de 1.0 a 2.0 (s), avanza 9.8 (m); por lo que podemos concluir que la velocidad de la partícula va disminuyendo en el intervalo de tiempo de 0.0 a 2.0 (s); además que la velocidad es positiva y por lo tanto se aleja del origen. En algún lugar del intervalo entre 2.0 y 3.0 (s), podríamos suponer que en la vecindad de 2.5 (s), la partícula cambia su velocidad de positiva a negativa, por lo que debe haber un punto donde la velocidad haya sido cero. Después vemos que la velocidad es negativa, por lo que se va acercando al punto de partida y cada vez es mayor.

c) ¿En qué momento la velocidad de la piedra es cero?
Solución

La velocidad de la partícula es cero en algún tiempo entre 2.0 y 3.0 (s). Este tiempo podemos suponerlo 2.5 (s).

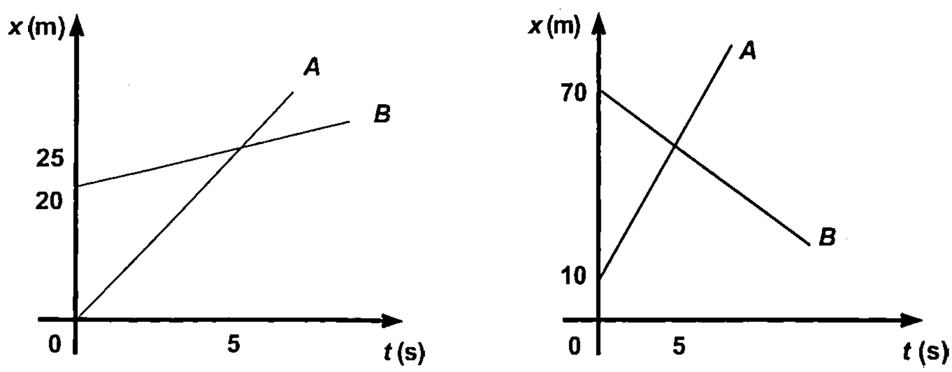
d) ¿En que momento la piedra empieza a caer?
Solución

La piedra empieza a caer justo después de que la piedra tiene velocidad cero, es decir, después de 2.5 (s); siguiendo con lo supuesto en el inciso anterior.

e) ¿Qué tipo de curva describe el movimiento de la piedra?
Solución

Podemos suponer que los puntos pertenecen a una parábola.

4. El movimiento de dos objetos está descrito por las gráficas siguientes:



Contesta las siguientes preguntas para cada una de las situaciones de cada gráfica:

a) ¿Cómo es el movimiento de *A* y *B*?
Solución

Primera gráfica: Los movimientos de *A* y *B* son a velocidad constante, porque la gráfica de ellos es una línea recta.
Segunda gráfica: Los movimientos de *A* y *B* son uniformes.

b) ¿Hacia dónde se dirigen?
Solución

Primera gráfica: Los dos se mueven alejándose del origen, porque la velocidad es positiva.
Segunda gráfica: *A* se aleja del origen o punto de referencia y *B* se acerca al origen.

c) ¿Quién se mueve más rápido?

Solución

Primera gráfica: A se mueve más rápido que B, porque la gráfica de su movimiento tiene una pendiente mayor.
Segunda gráfica: A se mueve más rápido que B; porque en 5 (s) recorrió aproximadamente 44 (m) y en el mismo intervalo B recorrió 25 (m); además lo podemos observar porque la pendiente de A es mayor a la de B (en valor absoluto).

d) ¿De dónde parte A?
Solución

Primera gráfica: A parte del origen.
Segunda gráfica: A parte desde 10 (m) del origen.

e) ¿De dónde parte B?
Solución

Primera gráfica: B parte a 20 (m) del origen en el sentido positivo.
Segunda gráfica: B parte desde 70 (m) del origen.

f) ¿Cuándo parte A? ¿Cuándo parte B?
Solución

Primera gráfica: Ambos parten en 0 (s).
Segunda gráfica: Ambos parten en 0 (s).

g) ¿Cómo son las velocidades de A y B?
Solución

Primera gráfica: La velocidad de ambos es positiva; la velocidad de A es mayor que la de B; además las podemos calcular:

$$v_{Am} = \frac{25-0}{5-0} = 5 \text{ (m/s)}$$

$$v_{Bm} = \frac{25-20}{5-0} = 1 \text{ (m/s)}$$

Segunda gráfica: La velocidad de A es positiva y la de B es negativa:

$$v_{Am} = \frac{54-10}{5-0} = 9 \quad \text{(m/s)}$$

$$v_{Bm} = \frac{54-70}{5-0} = -3 \text{ (m/s)}$$

h) ¿Alcanzó A a B? ¿Cuándo y dónde?
Solución

Primera gráfica: Sí, A alcanzó a B a los 5 (s) a 25 (m) del origen.

Segunda gráfica: Sí, A alcanzó a B a los 5 (s) a 54 (m) del origen.

5. Considera la siguiente ecuación que describe el movimiento de una partícula en línea recta

$$x(t) = 2.0\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)(\text{m})$$

donde t se mide en (s). El argumento de la función trigonométrica está en radianes.

a) Completa la siguiente tabla de valores

t (s)	*x (m)*
0	2
1.0	
2.0	
3.0	
4.0	

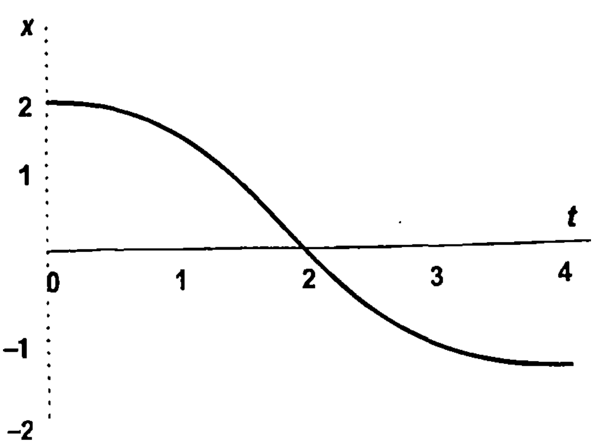
Solución

Tabla de valores

t (s)	*x (m)*
0	2
1.0	1.4
2.0	0.0
3.0	–1.4
4.0	–2.0

b) Construye la gráfica con los valores que completaste.
Solución

Gráfica:



c) Construye la siguiente tabla de la misma ecuación.

t (*s*)	*x* (*m*)	*t* (*s*)	*x* (*m*)	*t* (*s*)	*x* (*m*)
0		1.0		2.0	
0.2		1.2		2.2	
0.4		1.4		2.4	
0.6		1.6		2.6	
0.8		1.8		2.8	

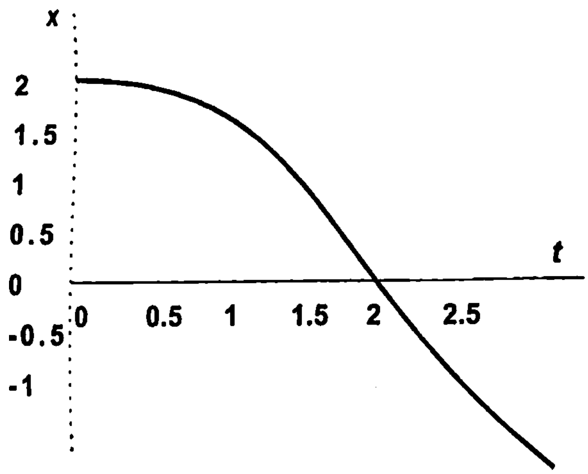
Solución

Tabla de valores:

t(s)	*x*(m)	*t*(s)	*x*(m)	*t*(s)	*x*(m)
0.0	2.0	1.0	1.4	2.0	0.0
0.2	2.0	1.2	1.2	2.2	–0.3
0.4	1.9	1.4	0.9	2.4	–0.6
0.6	1.8	1.6	0.6	2.6	–0.9
0.8	1.6	1.8	0.3	2.8	–1.2

d) Grafica esta tabla

Solución



e) Explica con tus palabras el comportamiento de la partícula

Solución

La partícula se mueve hacia el origen en el intervalo de 0.0 a 2.0 (s), con velocidad negativa y va en aumento; después de los 2.0 (s) se aleja del origen y su velocidad sigue siendo negativa.

6. La siguiente ecuación describe el movimiento de una partícula en una línea recta: $x(t) = 8.00\text{sen}(0.400t^2)\ln(1.10t)(\text{m})$ donde t se mide en segundos.

a) Encuentra las dimensiones de los números 8.00, 0.400 y 1.10 de la ecuación.

Solución

La dimensión de 8.00 tiene que ser de longitud porque está multiplicada por funciones, que sabemos no tienen dimensión, y está igualada a la posición que tiene dimensión de longitud. La dimensión de 0.400 es $1/T^2$ porque multiplica a t^2 con dimensión T^2 y juntos forman el argumento del *seno*, una función, y sabemos que el argumento de cualquier función es adimensional. Esta es la misma razón por la cual 1.10 tiene dimensión de 1/T, sólo que la función en este caso es *ln* y multiplica sólo a *t*.

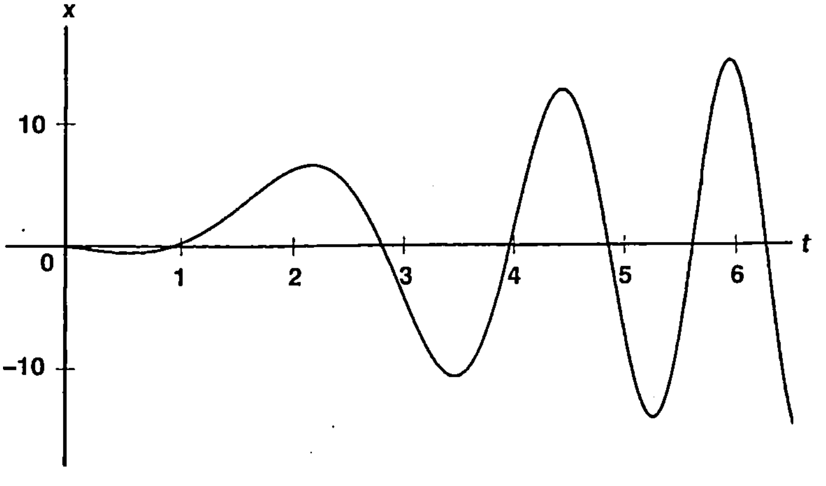
b) Construye la siguiente tabla de valores con la ecuación de movimiento en el intervalo de t = 0 (s) a t = 6.00 (s).

Solución

t	*x(t)*	*T*	*x(t)*	*T*	*x(t)*	*t*	*x(t)*	*T*	*x(t)*
0	------	1.25	1.49	2.50	4.84	3.75	−6.93	5.00	−7.42
0.250	−0.258	1.50	3.14	2.75	1.03	4.00	1.38	5.25	−14.0
0.500	−0.477	1.75	4.93	3.00	−4.23	4.25	9.98	5.50	−6.48
0.750	−0.343	2.00	6.30	3.25	−9.00	4.50	12.4	5.75	9.03
1.00	0.297	2.25	6.51	3.50	−10.6	4.75	5.14	6.00	14.6

c) Construye, usando papel milimétrico, la gráfica con los valores que encontraste en el inciso *b*).

Solución



d) Encuentra la velocidad media de la partícula entre t = 1.00 y t = 2.00 (s). Muestra tu procedimiento. ¿Qué significa el signo de la velocidad media? Usa gráfica para contestar.

Solución

Para encontrar la velocidad media entre t = 1.00 y t = 2.00 (s) tenemos que $v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ donde (Δx significa el cambio en la posición, es decir $x(2.00) - x(1.00)$ y de la misma forma (t es 2.00 –

1.00. Esto queda $v_m = \dfrac{6.30-0.297}{2.00-1.00}$ con resultado 6.00 (m/s) que es la velocidad media que buscábamos; el signo, que es positivo, significa que la pendiente de la recta que toca la curva en esos dos tiempos es positiva y esto lo podemos observar en la gráfica.

e) Encuentra la velocidad media de la partícula entre $t = 1.00$ y $t = 3.00$ (s). Muestra tu procedimiento. ¿Qué significa el signo de la velocidad media? Usa gráfica para contestar.

Solución

De la misma manera: $v_m = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{-4.23-0.297}{3.00-1.00}$ que en este caso resulta –2.26 (m/s). El signo negativo significa que la pendiente de la recta que toca la curva en esos dos tiempos es negativa y esto lo podemos observar en la gráfica.

f) ¿Hay algún intervalo para el que la velocidad media de la partícula sea cero?

Solución

Sí hay muchos intervalos donde la velocidad media es cero. Estos son cuando la posición inicial y final sean las mismas. Un ejemplo es en el intervalo de 0.9 (s) a 2.8 (s). Otro es en el intervalo de 2.0 (s) a 2.4 (s).

g) Explica con tus palabras el comportamiento de la partícula.

Solución

La partícula se mueve de un lado al otro oscilando con amplitud cada vez mayor.

7. Una partícula se mueve de acuerdo a la función de posición $x(t) = 2.00t^2 - 16.0t + 30.0$ (m) donde t está dado en segundos.

a) Encuentra la posición inicial de la partícula.

Solución

La posición inicial (cuando t es cero) está en 30.0 (m) porque los otros dos términos quedan cero para el tiempo cero.

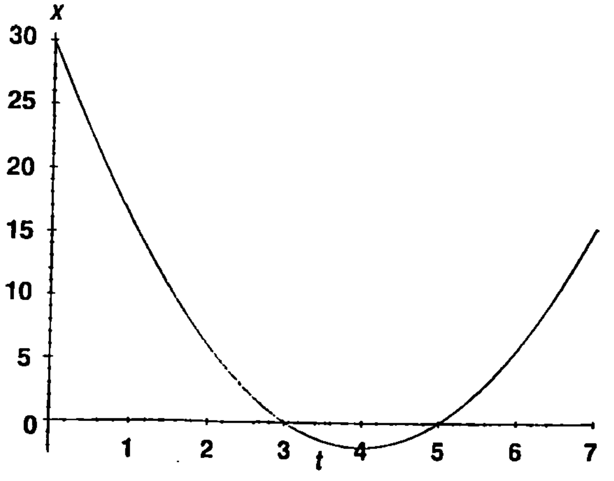
b) Analíticamente, encuentra el tiempo o tiempos en que la partícula pasa por el origen de nuestro sistema de coordenadas. Muestra tu procedimiento.

Solución

Para encontrar los tiempos en los que la partícula pasa por el origen del sistema de coordenadas tenemos que resolver la ecuación con $x(t) = 0$ esto es, resolver la ecuación como se muestra: $0 = 2.00t^2 - 16.0t + 30.0$ para esto dividimos la ecuación entre dos del modo siguiente: $0 = 1.00t^2 - 8.00t + 15.0$ y la factorizamos quedándonos como sigue: $0 = (t - 5.00)(t - 3.00)$ de donde podemos ver que tiene soluciones en $t = 5.00$ (s) y $t = 3.00$ (s).

c) Construye, usando papel milimétrico, la gráfica de movimiento en el intervalo de $t = 0.00$ (s) a $t = 7.00$ (s).

Solución



d) Encuentra la velocidad media:
i. de t = 1.0 (s) a t = 3.0 (s).

Solución

Entre t = 1.0 (s) y t = 3.0 (s) la velocidad media la sacamos como hicimos en el primer problema y en este caso nos queda $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0-16}{3.0-1.0}$ que nos da una velocidad media de −8.0 (m/s).

ii. de t = 3.0 (s) a t = 5.0 (s).

Solución

Entre t = 3.0 (s) a t = 5.0 (s) con el mismo procedimiento, $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0-0}{5.0-3.0}$ que evidentemente es una velocidad media de 0 (m/s).

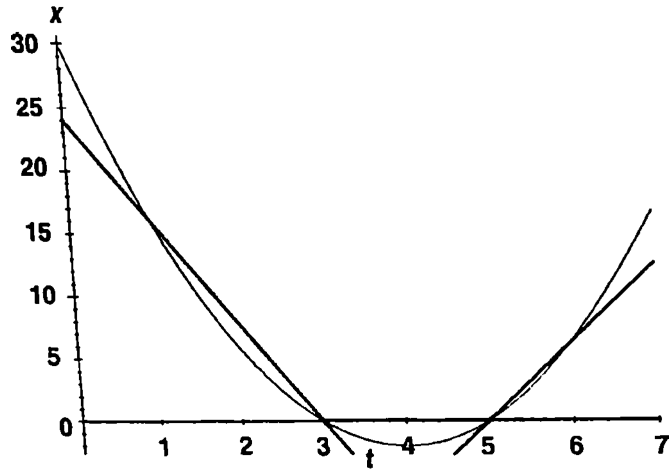
iii. de t = 5.0 (s) a t = 6.0 (s).

Solución

Con el mismo razonamiento, entre t = 5.0 (s) a t = 6.0 (s) nos queda: $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{6-0}{6.0-5.0}$ que resulta en una velocidad media de 6.0 (m/s).

e) Para cada intervalo en *d*) construye una recta en la gráfica cuya pendiente sea igual a la velocidad media en cada intervalo.

Solución



5.2 Problemas propuestos

1. La siguiente ecuación describe el movimiento de una partícula en una línea recta: $x(t) = 500\exp(-0.125t^2)$ (m) donde t se mide en (s).

a) Construye una tabla de valores con la ecuación de movimiento en el intervalo de $t = 0$ (s) a $t =$ 8.00 (s) donde usa al menos 17 valores de tiempo.
b) Construye, usando papel milimétrico, la gráfica con los valores que encontraste en el inciso *a*).
c) Explica con tus palabras el comportamiento de la partícula.

2. Construir gráficas nos puede ayudar a ilustrar por qué la ley de senos podía darnos valores erróneos en el cálculo de ángulos en triángulos. Tenemos la función $f(\theta) = 1.00$ sen(θ) donde θ está dado en grados.

Nota: El ángulo debe estar dado en radianes pero lo haremos en grados sólo para ilustrarlo mejor.

a) Construye una tabla de valores con la ecuación de movimiento en el intervalo de $\theta = 0°$ a $\theta = 540°$ donde el intervalo de cada dos valores sea de 25°.
Nota: No se te olvide tener tu calculadora en grados (degrees).
b) Construye, usando papel milimétrico, la gráfica con los valores que encontraste en el inciso *a*).
c) Observa que el seno es una función periódica. ¿Cómo se comporta la función para valores mayores a 540°?

Respuesta: (De la misma manera).

d) Usando la gráfica y en forma aproximada, encuentra los ángulos cuyo seno es 0.50. De esta forma estás encontrando el valor de sen^{-1} (0.50).

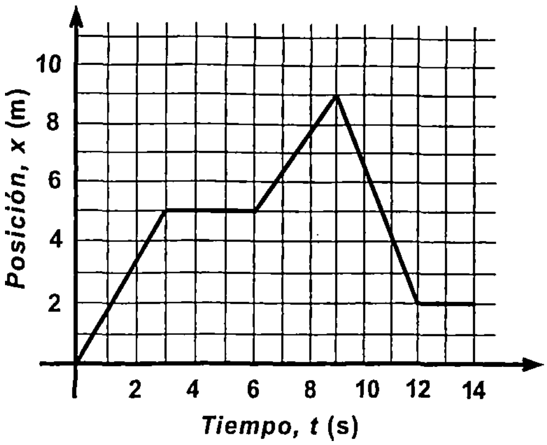
Respuesta: (30°, 150°, 390°, 510°).

e) ¿Cuáles son los ángulos menores a 180° que encontraste?

Respuesta: (30° y 150°).

f) Si usas la calculadora para encontrar el sen^{-1} (0.50) sólo te dará un valor, ¿cuál valor? Observa que existe otro valor menor a 180° que tiene seno igual a 0.50 y éste puede ser el que buscabas.

3. Una partícula se mueve de acuerdo a la siguiente función de posición.



a) Encuentra el cambio de posición de t = 2.0 (s) a t = 13.0 (s). Muestra tu procedimiento.
Respuesta: $\Delta x = -1.0\,(\mathrm{m})$.

b) Encuentra la distancia que recorre la partícula de t = 2.0 (s) a t = 13.0 (s). Explica tu razonamiento.
Respuesta: (13.0 metros).

c) Encuentra la velocidad media en los siguientes intervalos (muestra tu procedimiento en cada intervalo):

i. t = 3.0 (s) a t = 6.0 (s) *Respuesta* $\Delta x = -1.0\,(\mathrm{m})$

ii. t = 3.0 (s) a t = 9.0 (s) *Respuesta:* $(v_m = 2/3\,(\mathrm{m/s}))$

iii. t = 3.0 (s) a t = 13.0 (s) *Respuesta:* $(v_m = -3/10\,(\mathrm{m/s}))$

d) ¿Qué significa el signo de las velocidades medias en el inciso *c*)? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (positiva se aleja del origen, negativa se acerca).

e) Observa que en ciertos intervalos de tiempo la velocidad es constante. Encuentra en qué intervalos y calcula la velocidad en cada uno de los intervalos.
Respuesta: ($v_{(0<t<3)} = 5/3$, $v_{(3<t<6)} = 0$, $v_{(6<t<9)} = 4/3$, $v_{(9<t<12)} = -7/3$, $v_{(12<t<15)} = 0$).

f) Con el inciso *e*) construye una gráfica de velocidad *vs.* tiempo en el mismo intervalo de tiempo que de posición.

4. Una partícula se mueve de acuerdo a la función de posición $x(t) = -1.0t^2 + 2.0t + 8.0$ (m) donde t está dado en segundos.

a) Encuentra la posición inicial de la partícula.
Respuesta: (8.0 (m)).

b) Analíticamente, encuentra el tiempo o tiempos en que la partícula pasa por el origen.
Respuesta: ($t = -2, t = -4$ (s)).

c) Construye, usando papel milimétrico la gráfica movimiento en el intervalo de $t = 0.00$ (s) a $t =$ 6.00 (s).

d) Encuentra la velocidad media:

i. de $t = 0.0$ (s) a $t = 1.0$ (s) *Respuesta:* (1.0 (m/s))
ii. de $t = 1.0$ (s) a $t = 2.0$ (s) *Respuesta:* (–1.0 (m/s))
iii. de $t = 5.0$ (s) a $t = 6.0$ (s) *Respuesta:* (–9.0 (m/s))

e) Para cada intervalo en *d*) construye una recta en la gráfica cuya pendiente sea la velocidad media en cada intervalo.

5. En la tabla siguiente se da la posición x de una partícula para diferentes tiempos (la posición está dada en metros y el tiempo en segundos):

t	*x(t)*	*T*	*X(t)*	*T*	*x(t)*	*T*	*x(t)*	*t*	*x(t)*
0.0	0	3.00	0.85	6.00	–7.6	9.00	8.3	12.0	–1.3
0.50	0.21	3.50	–3.1	6.50	6.3	9.50	–1.2	12.5	0
1.00	0.69	4.00	–9.2	7.00	20	10.0	–6.6		
1.50	1.4	4.50	–16	7.50	28	10.5	–7.7		
2.00	2.2	5.00	–19	8.00	27	11.0	–6.1		
2.50	2.4	5.50	–17	8.50	19	11.5	–3.5		

a) Construye una gráfica de posición *versus* tiempo con los datos de la tabla en un papel milimétrico.

b) Describe qué pasa con el movimiento de la partícula.

6. La siguiente ecuación describe el movimiento de una partícula en una línea recta: $x(t) = 1.0t\cos(2.0t)$ (m) donde t se mide en (s).

a) Encuentra la dimensión y la unidad de cada una de las constantes: 2.0 y 1.0 de la ecuación. Muestra tu procedimiento.
Solución (2.0 [=] 1/T, 1.0 [=] L/T).

b) Usando la ecuación, completa la siguiente tabla de valores:

t(s)	*x(t)*	*t(s)*	*x(t)*	*t(s)*	*x(t)*	*t(s)*	*x(t)*
0		1.75		3.50		5.25	
0.250		2.00		3.75		5.50	
0.500		2.25		4.00			
0.750		2.50		4.25			
1.00		2.75		4.50			
1.25		3.00		4.75			
1.50		3.25		5.00			

c) Construye la gráfica de posición *versus* tiempo en papel milimétrico con los valores que encontraste.

Explica con tus palabras el movimiento de la partícula.

7. En la tabla siguiente se da la posición x de una partícula para diferentes tiempos (la posición está dada en metros y el tiempo en segundos):

t	$x(t)$	t	$x(t)$	T	$x(t)$	t	$x(t)$	t	$x(t)$
0.0	0	3.00	0.85	6.00	−7.6	9.00	8.3	12.0	−1.3
0.50	0.21	3.50	−3.1	6.50	6.3	9.50	−1.2	12.5	0
1.00	0.69	4.00	−9.2	7.00	20	10.0	−6.6		
1.50	1.4	4.50	−16	7.50	28	10.5	−7.7		
2.00	2.2	5.00	−19	8.00	27	11.0	−6.1		
2.50	2.4	5.50	−17	8.50	19	11.5	−3.5		

a) Construye una gráfica de posición *versus* tiempo con los datos de la tabla en un papel milimétrico.
b) Describe qué pasa con el movimiento de la partícula.

8. El movimiento de una tortuga en línea recta se modela por medio de la siguiente ecuación

$$x(t) = 50\left(1 - e^{-3t}\right)(\mathrm{m})$$

donde t ha sido medido en minutos.

a) ¿A qué distancia del origen parte la tortuga?
b) ¿Cuánto lleva recorrido a los 3 minutos?
c) ¿Cuánto lleva recorrido a los 10 minutos?
d) ¿Cuánto lleva recorrido a las 2 horas?
e) ¿Cuánto lleva recorrido a las 24 horas?
f) ¿A qué horas llega a recorrer 50 metros?

9. El movimiento de una hormiga esta descrito por la ecuación $s(t) = 5e^{-t/2}\,(\mathrm{m})$.

a) Completa la siguiente tabla

$t(s)$	$x(m)$
0	
0.2	
0.4	
...	
2.0	

b) Grafica estos puntos.
c) Interpreta qué sucede con la hormiga.

10. Compara las gráficas de las siguientes funciones. Para ello, grafica las dos funciones en el intervalo de $0 < t \leq 2\,(\mathrm{s})$ en el mismo papel. Comenta tus resultados.

$$x_1(t) = t$$

$$x_2(t) = t^2$$

11. Tienes la siguiente función de posición

$$x(t) = t^2 - t\ (\mathrm{m})$$

donde t está dado en segundos.

a) Completa la siguiente tabla.

$t(s)$	$x(m)$
0	0
1	
2	
3	
4	
5	

b) Grafica la función usando los puntos de la tabla.

c) La ecuación, la tabla y la gráfica son diferentes maneras de representar la misma función. ¿Cuál de ellas la representa mejor? Explica.

12. Se tiene una partícula moviéndose en una línea recta. Su movimiento está descrito por la ecuación

$$x(t) = 2.0e^{-t/4}\ (\mathrm{m})$$

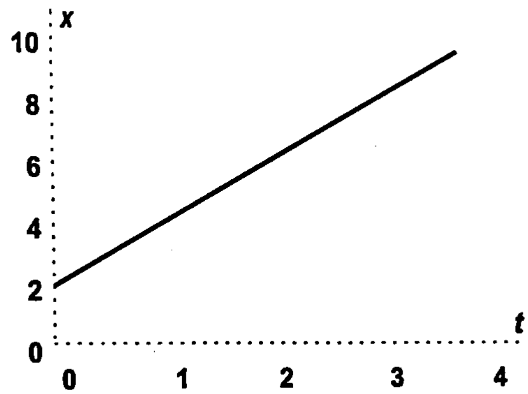
donde el tiempo está medido en segundos.

a) Completa la siguiente tabla de valores:

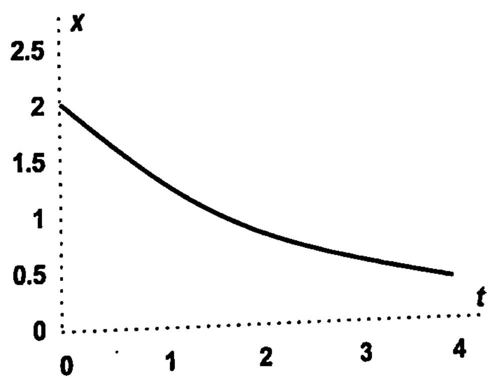
$t(s)$	$x(m)$
0	
1	
2	
3	
4	

¿Cuál de los siguientes tres gráficos representa mejor este movimiento?

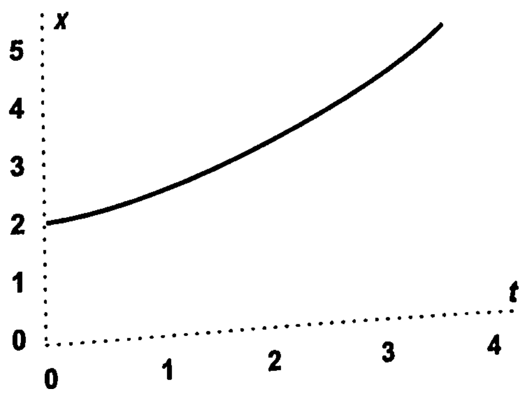
(i)



(ii)



(iii)



13. Tienes la siguiente función de posición

$$x(t) = t^2 - t \text{ (m)}$$

donde t está dada en segundos.

a) Completa la siguiente tabla:

$t(s)$	$x(m)$
0	
1	
2	
3	
4	

b) Grafica la función usando los puntos de la tabla.

c) La ecuación, la tabla y la gráfica son diferentes maneras de representar a la misma función. ¿Cuál de ellas la representa mejor? Explica.

14. Considera la siguiente ecuación que describe el movimiento de una partícula en una línea recta

$$x(t) = 2\cos(\pi t / 4)\,(\mathrm{m})$$

donde t se mide en (s). El argumento de la función trigonométrica está en radianes.

a) Completa la siguiente tabla de valores.

$t(s)$	$x(m)$
0	
1	
2	
3	
4	

b) Construye el gráfico con los valores que completaste.

c) Construye la siguiente tabla de la misma ecuación.

$t(s)$	$x(m)$	$t(s)$	$x(m)$	$t(s)$	$x(m)$
0		1.0		2.0	
0.2		1.2		2.2	
0.4		1.4		2.4	
0.6		1.6		2.6	
0.8		1.8		2.8	

d) Grafica esta tabla.

e) Explica con sus palabras qué es lo que está haciendo la partícula.

15. Considera la siguiente ecuación que describe el movimiento de una partícula

$$x(t) = 3 + 2t - t^2 \text{ (m)}$$

a) Construye una tabla de datos que tenga 10 puntos, y que tome el rango entre $t = 0$ y $t = 5$ (s).

b) Grafica esta tabla.

c) Explica con tus propias palabras qué es lo que está haciendo la partícula.

16. Considera la siguiente ecuación que describe el movimiento de una partícula

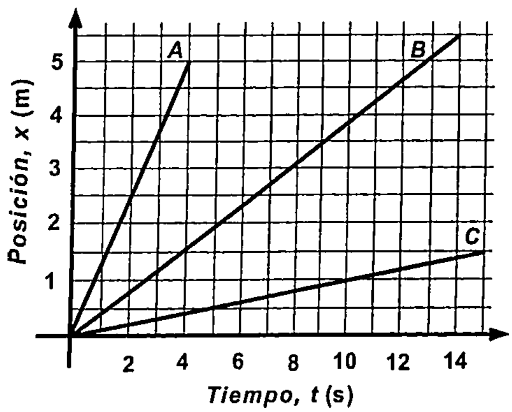
$$x(t) = 50(a - e^{-3t}) \text{ (m)}$$

donde t está medido en minutos.

a) ¿Qué velocidad media tiene la tortuga en los primeros 4 minutos?
b) ¿Qué velocidad media tiene la tortuga en los siguientes 4 minutos?
c) ¿Qué velocidad media tiene la tortuga en los siguientes 4 minutos (de 8 a 12 minutos)?

17. Los astronautas del Apolo 11 hicieron su viaje a la luna (3.8 × 105 (m)) en exactamente tres días. ¿Cuál fue su velocidad media en (km/h)?

18. Calcula la pendiente de las rectas en la siguiente gráfica. Estas rectas representan la posición de tres diferentes partículas. ¿Cuál tiene mayor velocidad? ¿Cuál menor velocidad?



19. Dos automóviles inician al mismo tiempo un viaje de 400 (km). Uno es una Pathfinder Nissan que hace el recorrido con una velocidad constante de 90 (km/h) y el otro es un VW sedán que lo hace con una velocidad constante de 55 (km/h).

a) Construye una gráfica mostrando el movimiento de los dos automóviles.

b) ¿Cuánto tiempo antes llega la Pathfinder que el VW Sedán?

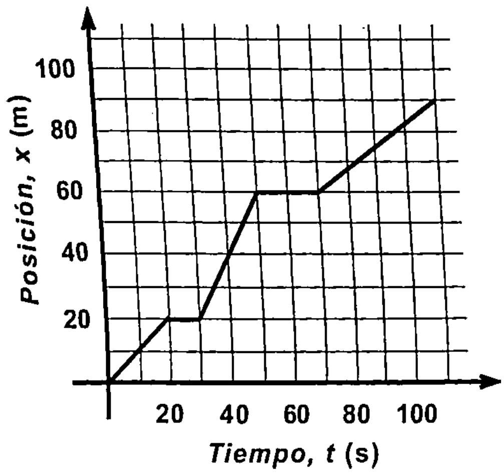
c) Resulta que a la mitad del camino los tripulantes de la Pathfinder se paran a comer y como se encuentran a unos amigos se demoran 3 horas. En cambio, los del VW Sedán, que tienen prisa sólo se paran en el mismo lugar a comprar algo para llevar y se demoran media hora. Construye una nueva gráfica. ¿Quién llega primero y por cuánto tiempo?

20. Te encuentras en la azotea de un edificio y te entretienes viendo cómo avanzan los carros en la avenida. Observas que un Tsuru II avanza en la avenida con una velocidad de 35 (km/h). En este momento divisas a un Jaguar a una distancia de 150 (m) por detrás del Tsuru en su misma dirección y a una velocidad de 85 (km/h). Tú, que tienes un cronómetro a la mano, tomas el tiempo que tarda el Jaguar en rebasar al Tsuru. ¿Cuánto tiempo tarda? Grafica el movimiento de los autos.

21. La siguiente figura es la gráfica de la posición de un perro en un campo abierto.

a) ¿Qué distancia total recorrió el perro?

b) ¿En qué intervalo de tiempo el perro llevó mayor velocidad media?



c) De la gráfica llena la siguiente tabla

Intervalo, (s)	$x(t_2)-x(t_1)$	$\Delta x, (m)$	$\Delta t, [s]$	$\frac{\Delta x}{\Delta t}$	$V_{media}, (m/s)$
0, 20					
0, 30					
30, 50					
30, 70					

d) Explica la diferencia en velocidad media de los primeros intervalos y los dos últimos.

22. La siguiente ecuación representa el movimiento de una partícula.

$$x(t) = \frac{1}{t} \ (\mathrm{m})$$

donde t está dado en segundos. Grafica la función para valores de $0 < t = 2$ (s).

23. Se tiene la siguiente función de posición de una partícula en movimiento

$$x = t^2 - 6t + 9 \text{ (m)}$$

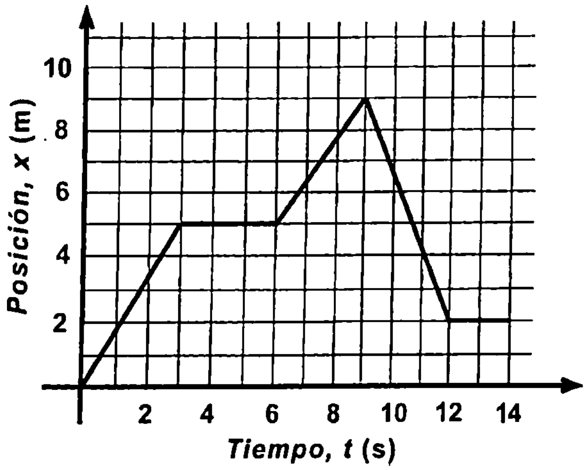
donde t está dado en segundos

a) Grafica la función en $0 \leq t \leq 7$.
b) ¿Para qué tiempo (o tiempos) t_1 la partícula tiene una velocidad media negativa entre $t = 0$ y $t = t_1$?
c) ¿Para qué tiempo (o tiempos) t_2 la partícula tiene una velocidad media negativa entre $t = 0$ y $t = t_2$?
d) ¿Para qué tiempo (o tiempos) t_3 la partícula tiene una velocidad media negativa entre $t = 0$ y $t = t_3$?

24. Una partícula se mueve con velocidad constante de 2 (m/s) por 5(s), se detiene por 6 (s), y se regresa al punto de partida a velocidad constante de 1 (m/s).

a) Grafica el movimiento
b) ¿Cuál es là distancia total recorrida?
c) ¿Cuál es el tiempo total del recorrido?

25. Una partícula se mueve de acuerdo a la siguiente función de posición.



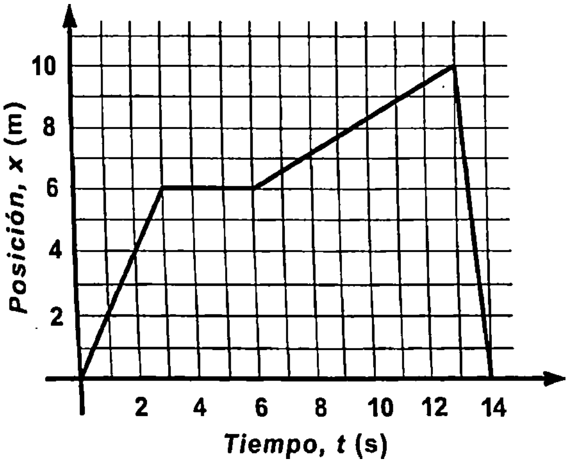
Calcula:

a) La velocidad media entre $t = 4$ (s) y $t = 12$ (s).
b) La velocidad media entre $t = 0$ (s) y $t = 15$ (s).
c) La distancia total recorrida en los 15 (s) de su movimiento.
d) Encuentra los tiempos de un intervalo en que su velocidad media sea cero pero la partícula no estuvo en reposo en el intervalo.

26. Una partícula parte en $t = 0$ (s) de una posición de 10 (m) con una velocidad constante de 5.0 (m/s). En $t = 15$ (s) cambia a velocidad constante de 8.0 (m/s). En $t = 15$ (s) cambia de dirección con una velocidad constante de -6.0 (m/s) hasta llegar al origen ($x = 0$). De acuerdo a la anterior descripción del movimiento.

a) Construye una gráfica de posición *vs.* tiempo.
b) Calcula el cambio de posición desde $t = 0$ hasta que llega al origen.
c) Calcula la distancia total recorrida.

27. Una partícula se mueve de acuerdo a la siguiente función de posición



a) ¿En qué intervalo de tiempo la partícula tiene una mayor velocidad constante?
b) ¿Cuál es la velocidad de tu respuesta del inciso anterior?
c) ¿En qué intervalo de tiempo la partícula tiene una menor velocidad constante? (independiente del signo de la velocidad).
d) ¿Cuál es la velocidad de tu respuesta del inciso anterior?
e) Calcula el cambio de posición entre $t = 0$ y $t = 15$ (s).
f) Calcula la distancia recorrida entre $t = 0$ y $t = 15$ (s).

28. El movimiento de una partícula está descrito por la siguiente ecuación $x(t) = t^3 - 15t + 1$ (m) donde el tiempo está medido en segundos.

a) Grafica la función de $t = 0$ a $t = 5$ (s).

b) Encuentra la velocidad media de la partícula entre

i. $t = 0$ a $t = 1$ (s).
ii. $t = 1$ a $t = 2$ (s).
iii. $t = 2$ a $t = 3$ (s).
iv. $t = 3$ a $t = 4$ (s).

29. El movimiento de una partícula está descrito por la siguiente ecuación

$$x(t) = 3t^2 - 3t + 1 \text{ (m)}$$

donde el tiempo está medido en (s).

a) Completa la siguiente tabla

$t(s)$	$x(m)$
0	
1	
2	
3	
4	
5	

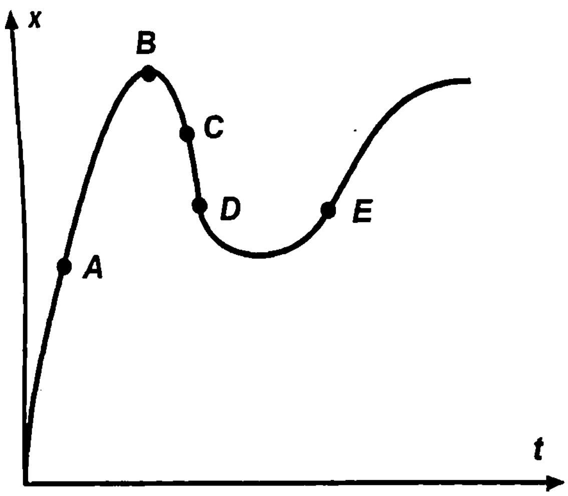
b) Encuentra la velocidad media de la partícula entre

(1) $t = 0$ a $t = 1$ (s).
(2) $t = 1$ a $t = 2$ (s).
(3) $t = 2$ a $t = 3$ (s).
(4) $t = 3$ a $t = 4$ (s).

6 PROBLEMAS DE Velocidad instantánea

6.1 Problemas resueltos

1. Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta y su posición con respecto al origen O se representa en la gráfica siguiente:



Considerando los puntos A, B, C, D y E, responde y explica:

a) Describe con tus propias palabras el movimiento realizado por la partícula entre A y E.

Solución

La partícula se aleja de la posición asociada con el punto A en dirección contraria de origen O. En la posición de punto B se regresa acercándose hasta llegar a la posición asociada con el punto E.

b) ¿Para cuáles de los tiempos (asociados a cada punto), la partícula tiene una velocidad instantánea igual a cero?

Solución

La velocidad es cero en el tiempo asociado con el punto B ya que ahí la recta tangente a la cuerva es horizontal.

c) ¿En qué tiempos la partícula tiene una velocidad instantánea negativa?
Solución

La velocidad es negativa en los tiempos de los puntos C y D.

d) ¿En cuál de los puntos considerados se encuentra más cerca del origen O?
Solución

La posición más cercana corresponde a la asociada con el punto A.

e) ¿Son iguales las velocidades A y E?
Solución

No son iguales; la velocidad de la partícula en el tiempo asociado con el punto A es mayor que la asociada con el punto E.

2. Una partícula se mueve con la siguiente función de posición $x(t) = 1.00\cos^2(t)$ (m) donde t está dado en segundos. Calcula por el método aproximado (no se te olvide poner tu calculadora en radianes).

a) Su velocidad instantánea en $t = 2.00$ (s).
Solución

Usemos un intervalo de 0.0001 (s)

- $x(2.00 + 0.0001) = 1.00\cos^2(2.0001) = 1.00(\cos^2(2.0001))^2 = 0.1732539$ (m).
- $x(2.00) = 1.00\cos^2(2.00) = 0.1731782$ (m).
- $\Delta x = x(2.00 + 0.0001) - x(2.00) = 7.56868 \times 10^{-15}$ (m).
- $\Delta t = 0.0001$ (s).
- $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0.757$ (m/s).
- Entonces la velocidad instantánea se aproxima a $v \approx 0.757$ (m/s).

b) Su velocidad instantánea en $t = 3.00$ (s).
Solución

Usemos un intervalo de 0.0001 (s)

- $x(3.00 + 0.0001) = 0.9801131$ (m).
- $x(3.00) = 0.9800851$ (m).
- $\Delta x = x(3.0001) - x(3.00) = 2.79321 \times 10^{-5}$.
- $\Delta t = 0.0001$ (s).
- $v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 0.279$ (m/s).
- Entonces la velocidad instantánea se aproxima a $v \approx 0.279$ (m/s).

3. Evalúa la función $f(t) = -1.00\text{sen}(2t)$ en $t = 2.00$ y $t = 3.00$ (s) y compara con tus respuestas en los incisos *a*) y *b*). ¿Qué puedes decir de estos resultados?

Solución

Si $f(t) = -1.00\text{sen}(2t)$.

- $f(2.00) = -\text{sen}(4.00) = 0.757$.
- $f(3.00) = -\text{sen}(6.00) = 0.279$.

Probablemente la función $f(t)$ es la velocidad instantánea para todo tiempo t de $x(t)$.

4. Una partícula se mueve con la siguiente función de posición $x(t) = 1.00t^3 - 14.0t$ (m) donde t está dado en segundos.

Calcula la velocidad instantánea para todo tiempo t y grafica v entre $t = 0$ y $t = 4.00$ (s).

Solución

Usemos el método analítico

$$x(t+\varepsilon) = (t+\varepsilon)^3 - 14(t+\varepsilon) = t^3 + 3t^2\varepsilon + 3t\ \varepsilon^2 + \varepsilon^3 - 14t - 14\varepsilon$$

$$x(t) = t^3 - 14t$$

$$\Delta x = x(t+\varepsilon) - x(t) = (t^3 + 3t^2\varepsilon + 3t\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - 14t - 14\varepsilon) - (t^3 - 14t)$$

$$\Delta x = 3t^2\varepsilon + 3t\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - 14\varepsilon = \varepsilon(3t^2 + 3t\varepsilon + \varepsilon^2 - 14)$$

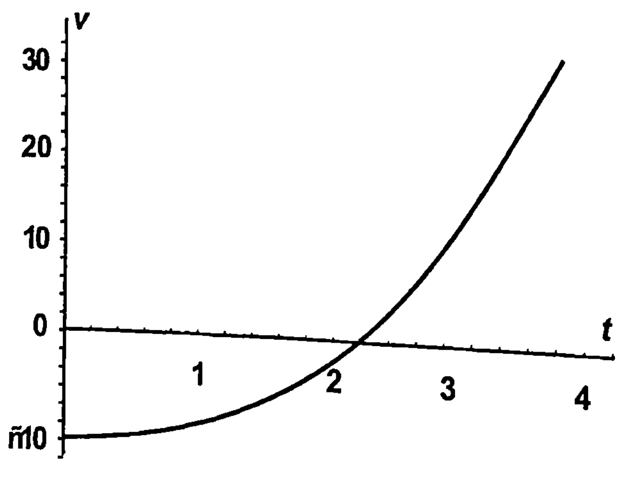
$$\Delta t = \varepsilon$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \varepsilon(3t^2 + 3t\varepsilon + \varepsilon^2 - 14)/\varepsilon = 3t^2 + 3t\varepsilon + \varepsilon^2 - 14$$

Entonces

$$v(t) = 3t^2 + 3t(0) + (0)^2 - 14$$
$$v(t) = 3.00t^2 - 14.0\ (\text{m/s})$$

Gráfica



5. Una partícula se mueve con la siguiente función de posición $x(t)=1.50t^3-3050t+2.60$ (m) donde t está dado en segundos. Resuelve:

a) Usa el método aproximado para encontrar la velocidad instantánea en t = 2.30 y t = 4.10 (s).
Solución

Método aproximado
t = 2.30 (s) con intervalo de 0.0001 (s)

$$v \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(2.3001)-x(2.30)}{0.0001}$$
$$v \approx 20.3 \text{ (m/s)}$$

t = 4.10 (s) con intervalo de 0.0001 (s)

$$v \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(4.1001)-x(4.10)}{0.0001}$$
$$v \approx 72.1 \text{ (m/s)}$$

b) Usa el método analítico para obtener la velocidad instantánea para todo tiempo y calcula la velocidad instantánea en t = 2.30 y t = 4.10 (s).
Solución

Método analítico

$$x(t+\varepsilon)=1.5t^3+4.5t^2\varepsilon+4.5t\varepsilon^2+1.5\varepsilon^3-3.5t-3.5\varepsilon+2.6$$

$$x(t)=1.5t^3-3.5t+2.6$$

$$\Delta x = x(t+\varepsilon)-x(t)=4.5t^2\varepsilon+4.5t\varepsilon^2+1.5\varepsilon^3-3.5\varepsilon$$

$$\Delta t = \varepsilon$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=4.5t^2+4.5t\varepsilon+1.5\varepsilon^2-3.5$$

Entonces

$$v(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x(t+\varepsilon)-x(t)}{\varepsilon}$$

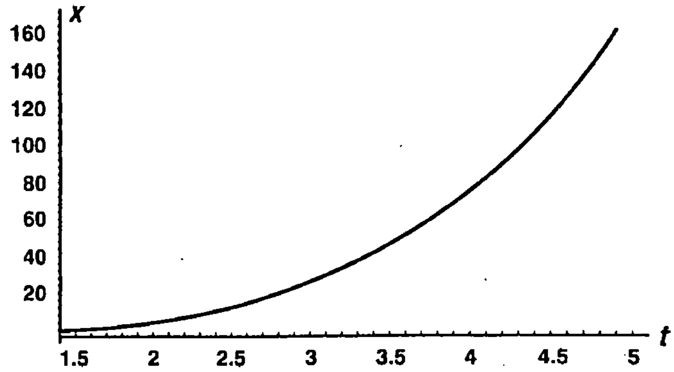
$$v(t)=(4.5t^2+4.5t(0)+1.5(0)^2-3.5)$$

$$v(t)=4.50t^2-3.5 \text{ (m/s)}$$

Evaluamos

$$v(2.30)=20.3 \text{ (m/s)}$$
$$v(4.10)=72.1 \text{ (m/s)}$$

6. Considera la siguiente gráfica que describe el movimiento de una partícula.

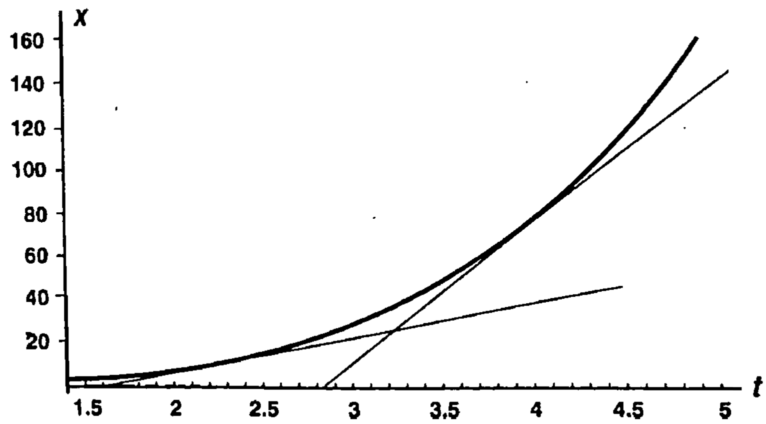


Encuentra un valor aproximado con el método gráfico, para la velocidad instantánea de la partícula descrita por esta gráfica en $t = 2.30$ y $t = 4.10$ (s).

Solución

Método gráfico:

Trazamos dos líneas tangentes a la cuerva en $t = 2.30$ y $t = 4.10$ (s).



Calculamos las pendientes de estas rectas:

$$v(2.30) \approx 20 \text{ (m/s)}$$
$$v(4.10) \approx 70 \text{ (m/s)}$$

7. Sea la función dada en metros

$$x(t) = 2.00t^3$$

donde t es en segundos.

a) Usa el método aproximado para graficar la velocidad instantánea de $t = 0$ a $t = 1.00$ (s) calculando sólo 6 puntos (0, 0.20, 0.40, 0.60, 0.80, 1.00) y usando un intervalo pequeño ($\Delta t = 0.001$ (s), por ejemplo).

Solución

Método aproximado

- $t = 0$ (s) con intervalo de 0.001 (s)

$$v \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(0.001) - x(0)}{0.001}$$
$$v \approx 2.0 \times 10^{-6} \text{ (m/s)}$$

- $t = 0.20$ (s) con intervalo de 0.001 (s)

$$v \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(0.201) - x(0.20)}{0.001}$$
$$v \approx 0.24 \text{ (m/s)}$$

- $t = 0.40$ (s) con intervalo de 0.001 (s)

$$v \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(0.401) - x(0.40)}{0.001}$$
$$v \approx 0.96 \text{ (m/s)}$$

- $t = 0.60$ (s) con intervalo de 0.001 (s)

$$v \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(0.601) - x(0.60)}{0.001}$$
$$v \approx 2.2 \text{ (m/s)}$$

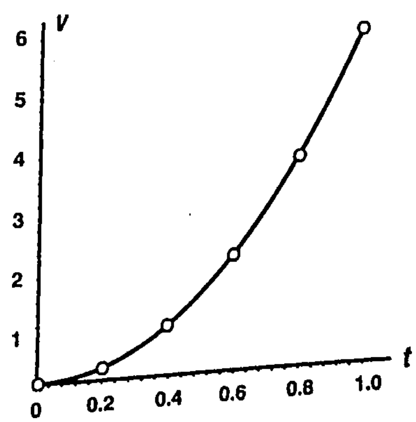
- $t = 0.80$ (s) con intervalo de 0.001 (s)

$$v \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(0.801) - x(0.80)}{0.001}$$
$$v \approx 3.8 \text{ (m/s)}$$

- $t = 1.00$ (s) con intervalo de 0.001 (s)

$$v \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(1.001) - x(1.00)}{0.001}$$
$$v \approx 6.0 \text{ (m/s)}$$

Graficando



b) Usa el método analítico para encontrar a velocidad instantánea en todo tiempo t.
Solución

Método analítico

$x(t+\varepsilon)=2t^3+6t^2\varepsilon+6t\varepsilon^2+2\varepsilon^3$

$x(t) = 2t^3$

$\Delta x = x(t+\varepsilon)-x(t)=6t^2\varepsilon+6t\varepsilon^2+2\varepsilon^3$

$\Delta t=\varepsilon$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=6t^2+6t\varepsilon+2\varepsilon^2$$

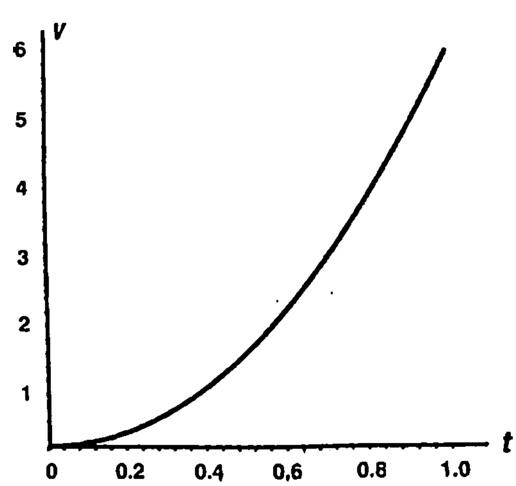
Entonces

$$v(t)=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x(t+\varepsilon)-x(t)}{\varepsilon}$$

$v(t)=(6t^2+6t(0)+2(0)^2)$

$v(t)=6.00t^2$ (m/s)

c) Usa la expresión de la velocidad instantánea del inciso anterior para graficar la velocidad instantánea entre t = 0 a t = 1.00 (s).
Solución



8. Método analítico: La ecuación $x(t)=2.00t^3-2.50t$ (m) describe el movimiento de una partícula donde t es medido en segundos.

a) Verifica la expresión $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
Solución

Vamos a demostrar el cubo de un binomio, esto lo haremos por pasos:

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)=(a+b)(a^2+2ab+b^2)=a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3$$
$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

b) Calcula, por el método analítico la velocidad instantánea para todo tiempo *t*.

Solución

$$v=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{x(t+\varepsilon)-x(t)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left(2(t+\varepsilon)^3-2.5(t+\varepsilon)\right)-\left(2t^3-2.5t\right)}{\varepsilon}$$

$$v=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\left(2(t^3+3t^2\varepsilon+3t\varepsilon^2+\varepsilon^3)-2.5t-2.5\varepsilon\right)-2t^3+2.5t}{\varepsilon}$$

$$v=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{2t^3+6t^2\varepsilon+6t\varepsilon^2+2\varepsilon^3-2.5t-2.5\varepsilon-2t^3+2.5t}{\varepsilon}$$

$$v=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{6t^2\varepsilon+6t\varepsilon^2+2\varepsilon^3-2.5\varepsilon}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon(6t^2+6t\varepsilon+2\varepsilon^2-2.5)}{\varepsilon}$$

$$v=\lim_{\varepsilon\to 0}(6t^2+6t\varepsilon+2\varepsilon^2-2.5)=6t^2-2.5$$

$v(t)$ = 6.00t2 – 2.5 (m/s)

c) Calcula la velocidad media de la partícula entre $(t-\varepsilon)$ y $(t+\varepsilon)$.

Solución

Para calcular la velocidad media de la partícula entre $(t-\varepsilon)$ y $(t+\varepsilon)$ usamos la definición de velocidad media: $\dfrac{x(t+\varepsilon)-x(t-\varepsilon)}{2\varepsilon}$, que ya aplicada a nuestro caso nos queda:

$$v_m=\frac{x(t+\varepsilon)-x(t-\varepsilon)}{2\varepsilon}=\frac{\left(2(t+\varepsilon)^3-2.5(t+\varepsilon)\right)-\left(2(t-\varepsilon)^3-2.5(t-\varepsilon)\right)}{2\varepsilon}$$

$$v_m=\frac{2\left(t^3+3t^2\varepsilon+3t\varepsilon^2+\varepsilon^3\right)-2.5t-2.5\varepsilon-2\left(t^3-3t^2\varepsilon+3t\varepsilon^2-\varepsilon^3\right)+2.5t-2.5\varepsilon}{2\varepsilon}$$

$$v_m=\frac{2t^3+6t^2\varepsilon+6t\varepsilon^2+2\varepsilon^3-2.5t-2.5\varepsilon-2t^3+6t^2\varepsilon-6t\varepsilon^2+2\varepsilon^3+2.5t-2.5\varepsilon}{2\varepsilon}$$

$$v_m=\frac{6t^2\varepsilon+2\varepsilon^3-2.5\varepsilon+6t^2\varepsilon+2\varepsilon^3-2.5\varepsilon}{2\varepsilon}=\frac{12t^2\varepsilon+4\varepsilon^3-5\varepsilon}{2\varepsilon}=\frac{2\varepsilon(6t^2+2\varepsilon^2-2.5)}{2\varepsilon}$$

$$v_m=6t^2+2\varepsilon^2-2.5$$

d) Usando el resultado del inciso anterior, calcula $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{x(t+\varepsilon)-x(t-\varepsilon)}{2\varepsilon}$.

Solución

Ahora si hacemos tender a cero pues sólo se elimina el término que lo incluya y nos queda:

$$=6t^2-2.5$$

e) Compara el resultado obtenido en el inciso anterior con el obtenido de la manera tradicional en el inciso *b*). ¿Puedes explicar por qué también funciona este método?

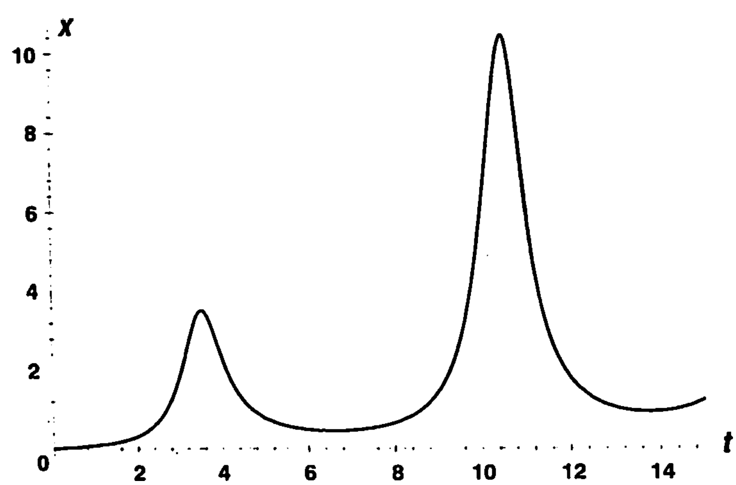
Solución

Nos queda lo mismo. Es otra manera de calcular la velocidad instantánea. Observa que sigue el mismo patrón. Es decir, hacemos tender el intervalo a cero.

9. Una partícula se mueve de acuerdo a la ecuación $x(t)=\dfrac{0.10t}{0.70\cos(0.90t)+0.80}$ (m) donde t es medido en segundos.

a) Construye una gráfica para la posición de la partícula para t entre 0 y 15 (s).

Solución



b) Calcula la velocidad instantánea de la partícula en t = 3.0 y t = 11 (s) por el método aproximado. Muestra tu procedimiento.

Solución

Para calcular la velocidad instantánea en t =3 (s) hacemos las siguientes evaluaciones

$$v\approx\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(3.001)-x(3)}{0.001}=3.5$$

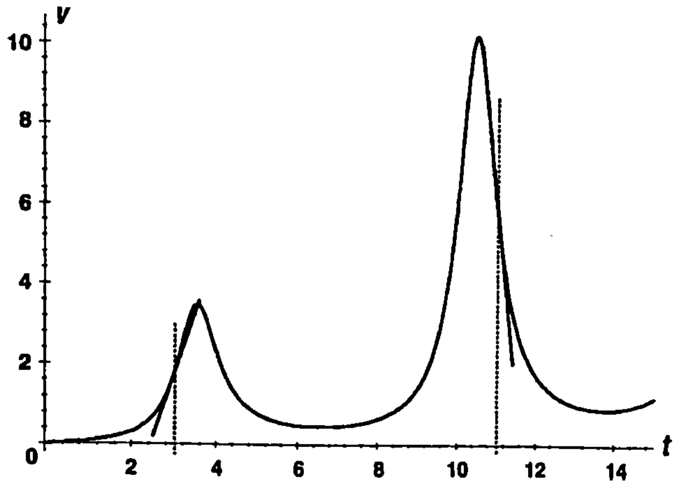
es decir que la velocidad en t = 3 (s) es aproximadamente 3.5 (m/s).

$$v\approx\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(11.001)-x(11)}{0.001}=-9.5$$

que nos indica que la partícula tiene una velocidad de −9.5 (m/s) para el tiempo t = 11 (s).

c) Calcula la velocidad instantánea en t = 3.0 y t = 11 (s) por el método gráfico. Traza las rectas claramente en tu gráfica y muestra tu procedimiento.

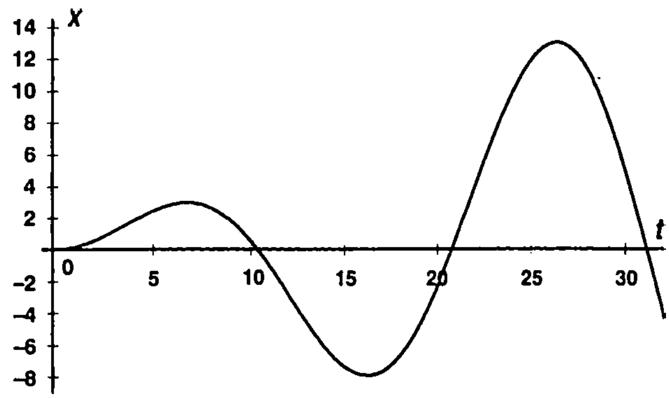
Solución



Las pendientes de estas rectas son aproximadamente de 4 y −10 que son valores aproximadamente iguales a los obtenidos en el inciso anterior.

6.2 Problemas propuestos

1. Una partícula se desplaza a lo largo de una línea recta y su posición con respecto al origen O se representa en la gráfica siguiente:



a) Describe con tus propias palabras el movimiento realizado por la partícula en el intervalo mostrado.

b) ¿En qué tiempos la partícula tiene una velocidad instantánea igual a cero? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (t = 6.5 (s), 16 (s) y 28 (s)).

c) ¿En qué intervalos de tiempo la partícula tiene una velocidad instantánea positiva? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (t = 0 (s) a t = 6.5 (s) y de t = 16 (s) a t = 28 (s)).

d) ¿En qué intervalos de tiempo la partícula tiene una velocidad instantánea negativa? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (t = 6.5 (s) a t = 16 (s) y de t = 28 (s) en adelante).

e) Usando el método gráfico y mostrando tu procedimiento calcula en forma aproximada la velocidad instantánea en:

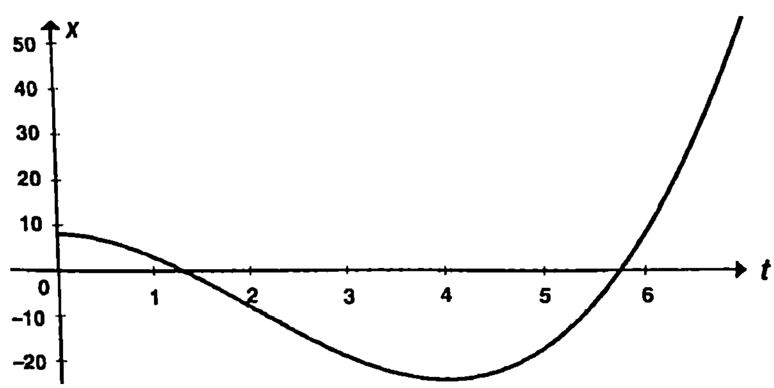
i. $t = 5$ (s) *Respuesta:* (0.2 (m/s))
ii. $t = 15$ (s) *Respuesta:* (−0.7 (m/s))
iii. $t = 25$ (s) *Respuesta:* (2 (m/s))

2. La posición de una partícula se representa por medio de la ecuación $x(t) = 3.0t\cos(2.0t)$ (m) donde t está dado en segundos. Calcula por el método aproximado mostrando tu procedimiento:

a) su velocidad instantánea en t =1.0 (s) *Respuesta:* (−6.7 (m/s))
b) su velocidad instantánea en t =2.5 (s) *Respuesta:* (15 (m/s))
c) su velocidad instantánea en t =3.2 (s) *Respuesta:* (0.7 (m/s))

3. Una partícula se mueve con la función de posición $x(t) = 1.0t^3 + 2.0t - 3.0$ (m) donde t está dado en segundos. Calcula la velocidad instantánea v para todo tiempo t y grafica $v(t)$ en el intervalo de t = 0 a t =3.00 (s).
Respuesta: $\left(v = 3.0t^2 + 2.0 \text{ (m/s)}\right)$.

4. Una partícula se mueve y su posición se representa por medio de la función $x(t) = 1.0t^3 - 6.0t^2 + 8.0$ (m) en donde t está dado en segundos. La gráfica es la siguiente:



a) Usando el método gráfico, contesta las siguientes preguntas:
i. De acuerdo a la gráfica, ¿en qué tiempos la partícula está en reposo?
Respuesta: (t = 0 (s) y t = 4 (s)).

ii. ¿Qué velocidad lleva la partícula en t = 2.0 (s)?
Respuesta: (−10 (m/s)).

iii. ¿Qué velocidad lleva la partícula en t = 5.0 (s)?
Respuesta: (15 (m/s)).

b) Usando el método aproximado, contesta las siguientes preguntas.
   i. Calcula la velocidad que lleva la partícula en $t = 2.0$ (s).
Respuesta: (−12 (m/s)).

   ii. Calcula la velocidad que lleva la partícula en $t = 5.0$ (s).
Respuesta: (15 (m/s)).

   iii. ¿Son tus resultados en este inciso congruentes con tus resultados en el inciso *a*)?

c) Usa el método analítico para encontrar la velocidad instantánea para todo tiempo *t*. Una vez encontrada la ecuación de velocidad, responde:
   i. Calcula los tiempos en que la partícula está en reposo.
Respuesta: ($t = 0$, $t = 4$ (s)).

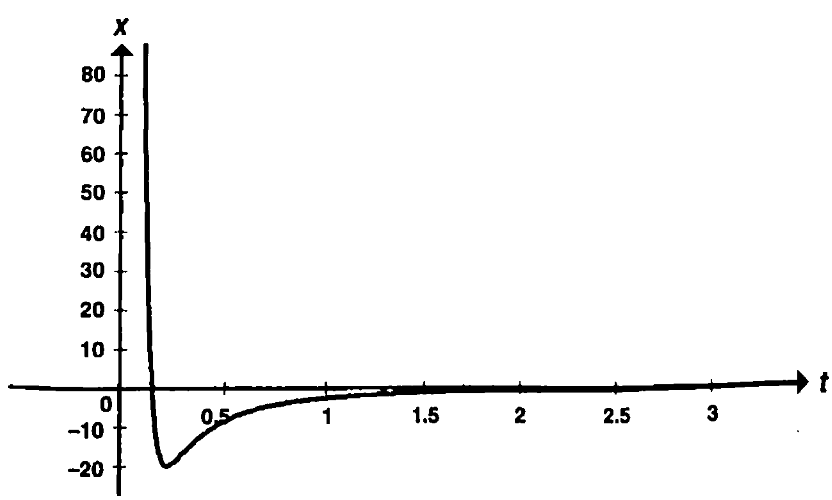
   ii. Calcula la velocidad que lleva la partícula en $t = 2.0$ (s).
Respuesta: (−12 (m/s)).

   iii. Calcula la velocidad que lleva la partícula en $t = 5.0$ (s).
Respuesta: (15 (m/s)).

   iv. ¿Son tus resultados en este inciso congruentes con tus resultados en el inciso *a* y *b*?

d) Construye una gráfica de velocidad de $t = 0$ (s) a $t = 7.0$ (s) a partir de tu respuesta en el inciso *c*).

5. La siguiente gráfica describe la posición de una partícula con respecto al tiempo. La posición está dada en metros y el tiempo en segundos.



a) Describe el movimiento de la partícula entre $t = 0$ y $t = 3.0$ (s).

b) Calcula la velocidad instantánea de la partícula en $t = 0.2$ (s), $t = 0.8$ (s) y 1.2 (s).
Respuesta: ($v(0.2) = -93.75$ (m/s), $v(0.8) = 8.4$ (m/s), $v(1.2) = 2.8$ (m/s)).

c) *A* simple vista, ¿en qué tiempo la partícula es más rápida? Explica tu razonamiento.

d) ¿En qué tiempo o tiempos la partícula está en reposo? Explica tu razonamiento.
Respuesta: ($t = 2.5$ (s))

6. El movimiento de una partícula está descrito por medio de la ecuación $x(t) = 15\sin(0.70t - 5.0)\cos(0.40t)$ (m) donde t está dado en segundos.

a) ¿Qué dimensión tienen las constantes 15, 0.70, 5.0 y 0.40?
Respuesta: (L, 1/T, adimensional, 1/T).

b) ¿Qué método es más conveniente para obtener la velocidad instantánea de la partícula en esta situación?

c) Encuentra, por el método aproximado, la velocidad instantánea de la partícula en $t = 0.80$ (s), $t = 3.6$ (s) y $t = 9.0$ (s).
Respuesta: $(v(0.8) = -4.5, v(3.6) = 2.6, v(9.0) = 0 \text{ (m/s)})$

d) Construye una gráfica con la función de posición en el intervalo de $t = 0$ a $t = 10$ (s).

e) Traza una recta que toque la curva para cada tiempo del inciso *b*) cuya pendiente represente la velocidad instantánea de la partícula en ese tiempo.

7. El movimiento de una partícula está descrito por la siguiente ecuación $x(t) = 2t^3 - 3t + 1$ donde x se mide en (m) y t en (s).

a) Encuentra la posición de la partícula en $t = 3$ (s).
b) Encuentra la posición de la partícula en $t = 5$ (s).
c) Encuentra la velocidad media de la partícula entre $t = 3$ y $t = 5$ (s).
d) Encuentra la velocidad media de la partícula entre $t = 3$ y $t = 4$ (s).
e) Encuentra la velocidad media de la partícula entre $t = 3$ y $t = 3.5$ (s).
f) Encuentra la velocidad media de la partícula entre $t = 3$ y $t = 3.001$ (s).
g) ¿A qué valor tenderá este cálculo si acercamos cada vez más los dos valores?

8. Una partícula se mueve con la siguiente función de posición $x(t) = t^4 - 4$ (m) donde t está dado en segundos. Calcula:

a) La velocidad media en los siguientes intervalos:
   i. de $t = 1$ a $t = 2$.
   ii. de $t = 1$ a $t = 1.5$.
   iii. de $t = 1$ a $t = 1.1$.
   iv. de $t = 1$ a $t = 1.01$.
   v. de $t = 1$ a $t = 1.001$.
   vi. ¿Cuál es la velocidad instantánea en $t = 1$?

b) La velocidad media en los siguientes intervalos:
   i. de $t = 2$ a $t = 3$.
   ii. de $t = 2$ a $t = 2.5$.

iii. de $t = 2$ a $t = 2.1$.
iv. de $t = 2$ a $t = 2.01$.
v. de $t = 2$ a $t = 2.001$.
vi. ¿Cuál es la velocidad instantánea en $t = 2$?

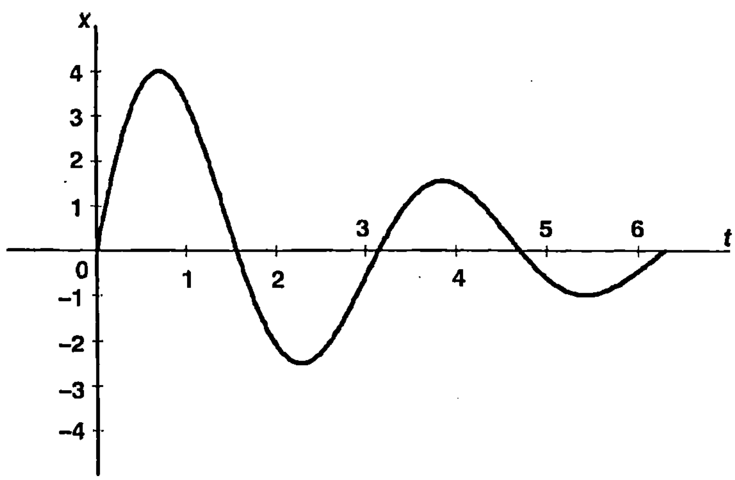
9. Para las siguientes funciones x está dada en metros y t en segundos. Calcula la velocidad instantánea en $t = 1$ (s) usando diferentes intervalos cada vez más pequeños hasta encontrar a cuál valor tiende la velocidad.

a) $x(t) = t$
b) $x(t) = t^2$
c) $x(t) = t^4$

7 PROBLEMAS DE Interpretación de gráficas

7.1 Problemas resueltos

1. Considera la siguiente gráfica que describe el movimiento de una masa unida a un resorte amortiguado.



a) ¿Cuántas veces se detiene la masa en los primeros 5 segundos?
Solución

3 veces.

b) Indica el signo de la posición de la partícula en:
i. $t = 1$.
ii. $t = 2$.
iii. $t = 3$.
iv. $t = 4$.

Solución

Signo de la posición de la partícula.

- En $t = 1$ positivo (está por arriba de la horizontal).
- En $t = 2$ negativo.

- En $t = 3$ negativo.
- En $t = 4$ positivo.

b) Indica el signo de la velocidad instantánea en:

i. $t = 1$.
ii. $t = 2$.
iii. $t = 3$.
iv. $t = 4$..

Solución

Signo de la velocidad instantánea.

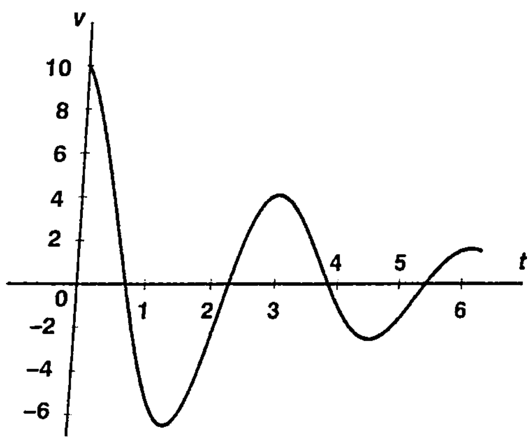
- En $t = 1$ negativa (la pendiente es negativa).
- En $t = 2$ negativa.
- En $t = 3$ positiva.
- En $t = 4$ negativa.

c) Construye una gráfica cualitativa de velocidad instantánea de la partícula entre $t = 0$ y $t = 6$ (s).
Solución

Observa de la gráfica de posición arriba, lo siguiente:

- La velocidad es cero en $t = 0.6$, $t = 2.2$, $t = 3.8$, $t = 5.4$ (s) aproximadamente.
- La velocidad es positiva en los siguientes intervalos: (0,0.6), (2.2, 3.8) y de $t = 5.4$ (s) en adelante.
- La velocidad es negativa en los siguientes intervalos: (0.6, 2.2) y (3.8, 5.4).

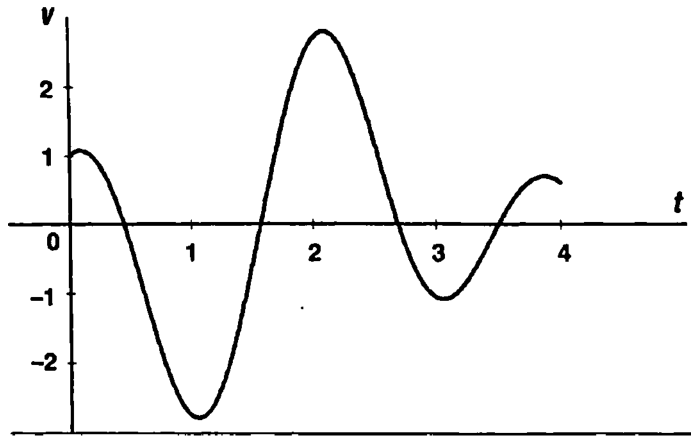
Con esta información graficamos



En este problema se pretende que el estudiante obtenga una gráfica parecida a la mostrada arriba, en particular que coincidan los puntos donde la velocidad instantánea es cero y el signo de la velocidad en cada intervalo es de interés.

2. En las siguientes gráficas que representan la velocidad instantánea de una partícula en diferentes situaciones, encuentra la gráfica cualitativa para la posición de la partícula para cada caso.

a) Velocidad instantánea.

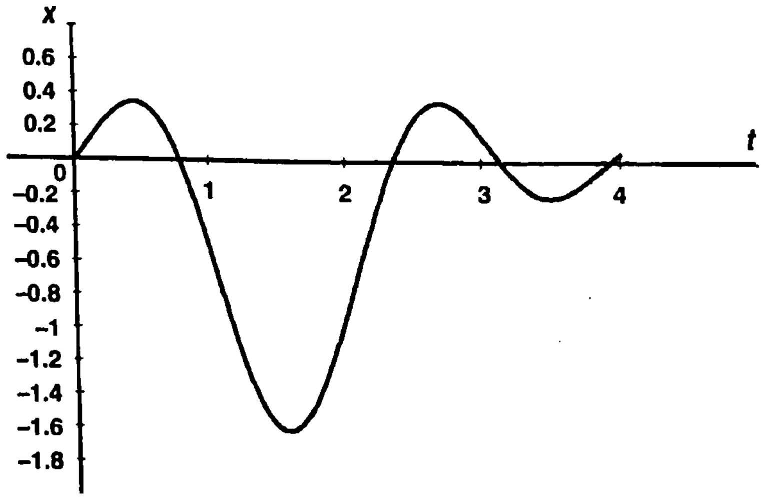


Solución

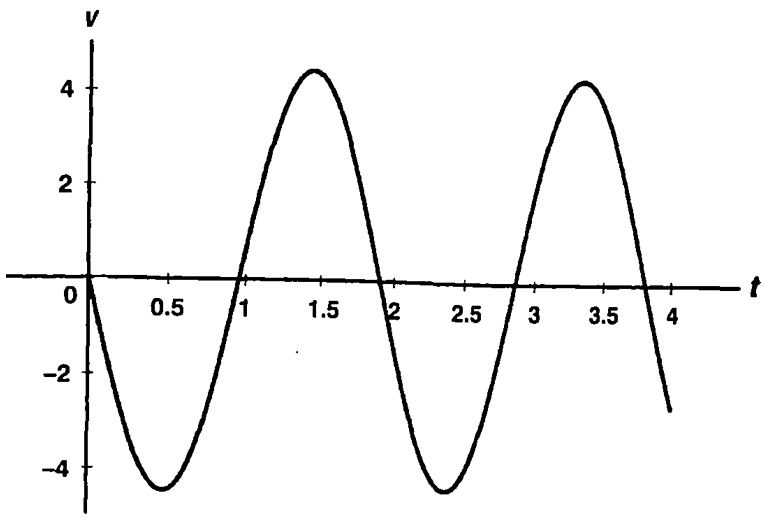
Observa de la gráfica de velocidad instantánea lo siguiente:

- Los tiempos en que la velocidad es cero, la posición es un máximo o un mínimo. Esto ocurre en $t = 0.4$, $t = 1.6$, $t = 2.8$ y $t = 3.5$ (s) aproximadamente.
- Un mínimo en la gráfica de posición ocurre cuando la velocidad cambia de negativa a positiva. Observando los tiempos en que la velocidad es cero, tenemos que los mínimos ocurren en $t = 1.6$ y $t = 3.5$ (s).
- Un máximo en la gráfica de posición ocurre cuando la velocidad cambia de positiva a negativa. Observando los tiempos en que la velocidad es cero, tenemos que los máximos ocurren en $t = 0.4$ y $t = 2.8$ (s).

Con esta información graficamos la posición de la partícula.



b) Velocidad instantánea

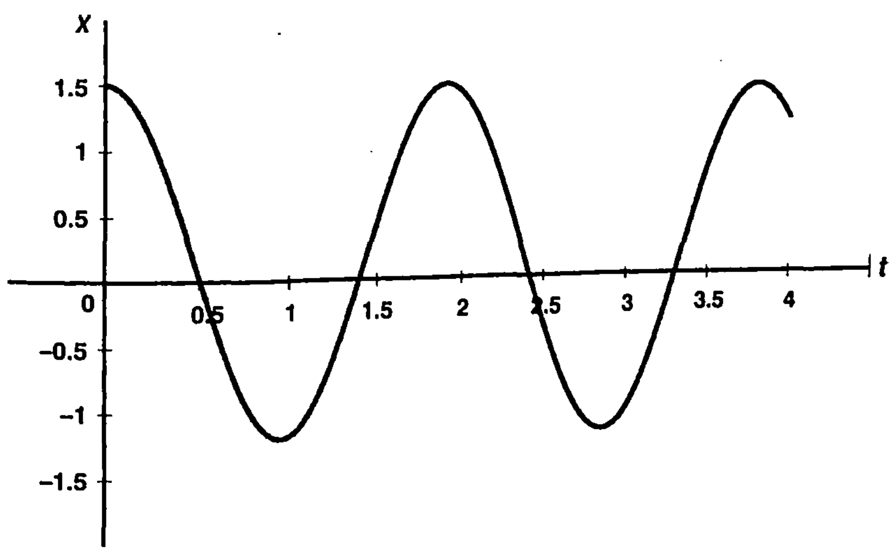


Solución

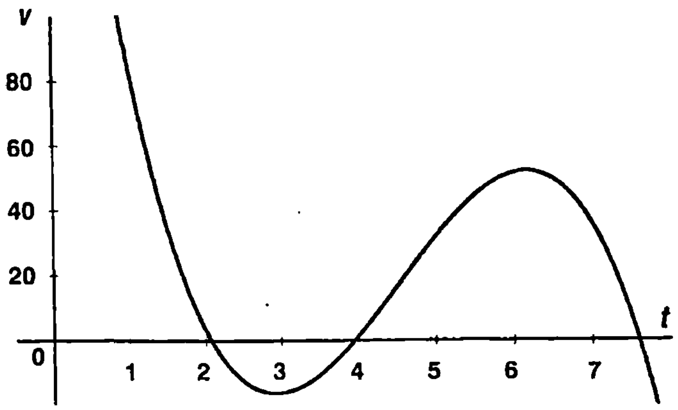
Observa en la gráfica de velocidad instantánea lo siguiente:

- Los tiempos en que la velocidad es cero, la posición es un máximo o un mínimo. Esto ocurre en $t = 0$, $t = 0.9$, $t = 1.9$ y $t = 2.8$ (s) aproximadamente.
- Un mínimo en la gráfica de posición ocurre cuando la velocidad cambia de negativa a positiva. Observando los tiempos en que la velocidad es cero, tenemos que los mínimos ocurren en $t = 0.9$ y $t = 2.8$ (s).
- Un máximo en la gráfica de posición ocurre cuando la velocidad cambia de positiva a negativa. Observando los tiempos en que la velocidad es cero, tenemos que los máximos ocurren en $t = 0$ y $t = 1.9$ (s).

Con esta información graficamos la posición de la partícula.



c) Velocidad instantánea

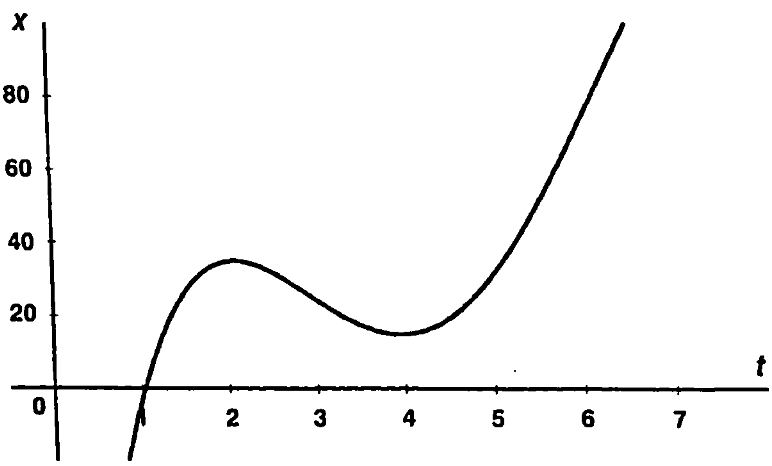


Solución

Observa en la gráfica de velocidad instantánea lo siguiente:

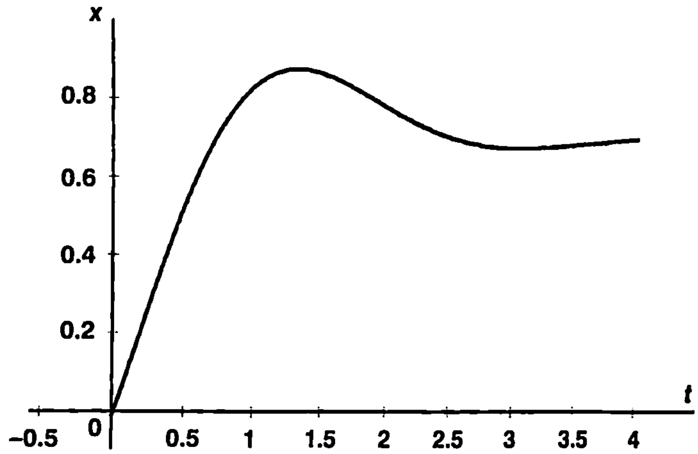
- Los tiempos en que la velocidad es cero, la posición es un máximo o un mínimo. Esto ocurre en $t = 2.1$ $t = 3.9$ y $t = 7.5$ (s) aproximadamente.
- Un mínimo en la gráfica de posición ocurre cuando la velocidad cambia de negativa a positiva. Observando los tiempos en que la velocidad es cero, tenemos que los mínimos ocurren en $t = 3.9$ (s).
- Un máximo en la gráfica de posición ocurre cuando la velocidad cambia de positiva a negativa. Observando los tiempos en que la velocidad es cero, tenemos que los máximos ocurren en $t = 2.1$ y $t = 7.5$ (s).

Con esta información graficamos la posición de la partícula.



Nota: El objetivo de estos problemas era encontrar gráficas cualitativas que coincidan más o menos en forma, y en particular en los puntos máximos y mínimos. **El eje del tiempo puede ir en cualquier lado.**

3. Se tiene la siguiente función de posición del movimiento de una partícula.



Contesta

a) ¿En qué tiempos la partícula está en reposo?

Solución

En $t = 1$ y a partir de $t = 3$ (aproximadamente).

b) Estima en forma gráfica la velocidad inicial.

Solución

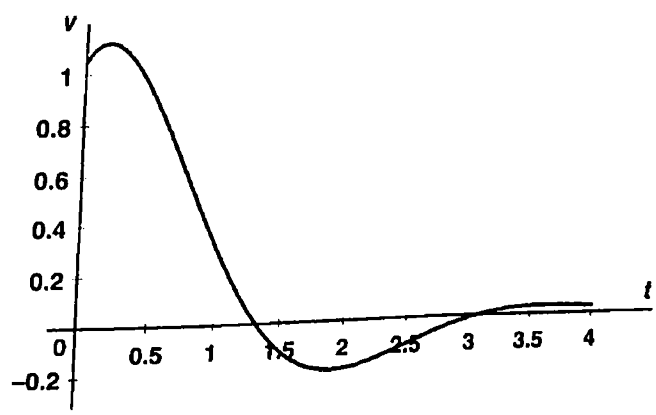
Se usa el método gráfico estudiado en el capítulo pasado obteniendo un valor aproximado a $v(0) = 0.75$ (m/s).

c) Observa que entre $t = 1$ y $t = 3$ la partícula alcanza una velocidad máxima (tiempo en el que anda más rápido, independientemente del signo que tenga). Haz su cálculo.

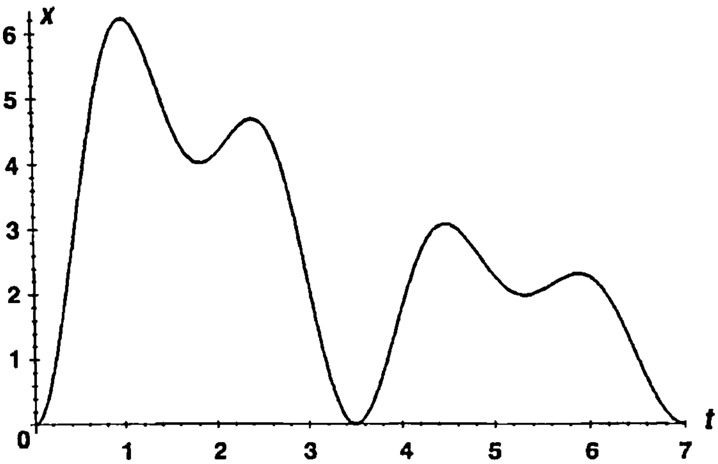
Solución

Observemos que aproximadamente en $t = 1.5$ la partícula viene regresando a gran velocidad. Estimemos, usando el método gráfico en ese tiempo, obteniendo $v(1.5)=0.45$(m/s).

d) Con la información obtenida en los incisos anteriores, grafica con valores en el eje de velocidad, la velocidad en función del tiempo.



4. El movimiento de una partícula está descrito por la siguiente gráfica de posición *versus* tiempo, donde la posición está dada en metros y el tiempo en segundos.



a) ¿En qué tiempos la partícula está en reposo?

Solución

La partícula está en reposo en t = 1.1 (s), t = 1.9 (s), t =2.7 (s), t =3.5 (s), t = 4.6 (s), t = 5.3 (s) y en t = 6.1 que es cuando la recta tangente a la curva es horizontal. Aparentemente la velocidad es también cero en t = 0 y t = 7.0 (s) pero no se puede observar con seguridad. Lo que sí podemos asegurar es que su velocidad es muy pequeña en magnitud en estos dos tiempos.

b) ¿En qué intervalos de tiempo su velocidad es positiva?

Solución

Su velocidad es positiva en los siguientes intervalos de tiempo: (0,1.1), (1.9, 2.7), (3.5, 4.6) y finalmente (5.3, 6.1) donde las rectas tangentes tienen pendiente positiva.

c) ¿En qué intervalos de tiempo su velocidad es negativa?

Solución

La velocidad es negativa en los siguientes intervalos de tiempo: (1.1, 1.9), (2.7, 3.5), (4.6, 5.3) y finalmente (6.1, 7.0).

d) Encuentra los tiempos en que la velocidad hacia la derecha es máxima para cada intervalo del inciso *b*).

Solución

Para el primer intervalo, la velocidad es máxima alrededor de t = .50 (s). Para el segundo intervalo, es cerca de t = 2.3 (s); para el tercer intervalo aproximadamente en t = 4.0 (s) y para el cuarto intervalo, la velocidad es máxima cerca de t = 5.7 (s).

e) Encuentra, por el método gráfico, las velocidades del inciso *d*).

Solución

Usando el método gráfico encontramos que la primera velocidad máxima es como de 10 (m/s), la segunda es alrededor de 2 (m/s), la tercera es aproximadamente 5 (m/s) y la cuarta es cerca de 1 (m/s).

f) Encuentra los tiempos en que la velocidad hacia la izquierda es máxima para cada intervalo del inciso *c*).

Solución

Los tiempos en que la velocidad es máxima aproximadamente, para los intervalos del inciso *b*) son, para el primer intervalo $t = 1.5$ (s), para el segundo intervalo $t = 3.1$ (s), para el tercero $t = 4.9$ (s) y para el cuarto intervalo $t = 6.5$ (s).

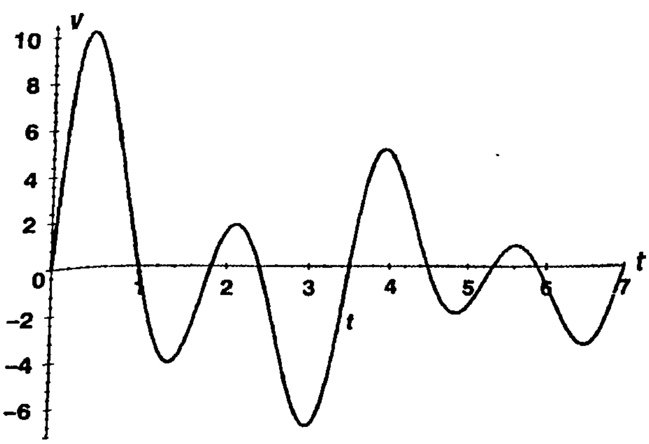
g) Encuentra, por el método gráfico, las velocidades del inciso *f*).

Solución

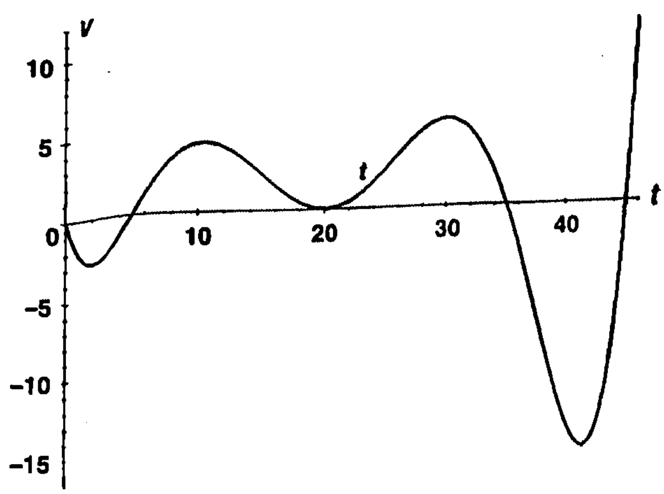
Usando el método gráfico encontramos que en el primer tiempo, la velocidad es aproximadamente -4 (m/s), en el segundo de -6 (m/s), para el tercero de -2 (m/s) y por último para el cuarto es de -4 (m/s).

h) Construye una gráfica cuantitativa de la velocidad *versus* tiempo.

Solución



5. La siguiente gráfica representa la velocidad en función del tiempo de una partícula en su movimiento en una línea recta. La velocidad está dada en metros por segundo y el tiempo en segundos.



a) ¿En qué tiempos la partícula está en reposo? Explica tu respuesta.

Solución

La partícula está en reposo aproximadamente en $t = 0$ (s), $t = 5$ (s), $t = 20$ (s), $t = 35$ (s) y $t = 45$ (s). **Ojo**: es una gráfica de velocidad. Vemos donde la velocidad es cero de la gráfica.

b) ¿En qué tiempos la partícula cambia de dirección? Explica tu respuesta.

Solución

Para cambiar de dirección la velocidad tiene que cambiar de signo. De la gráfica podemos observar que la velocidad cambia de signo en $t = 5$ (s), $t = 35$ (s) y $t = 45$ (s). En 0 segundos podría ser otro tiempo ya que la velocidad es cero y la curva tiene que venir desde el lado positivo de la velocidad. En 20 segundos la velocidad no cambia de signo, observa que se detiene y luego sigue adelante.

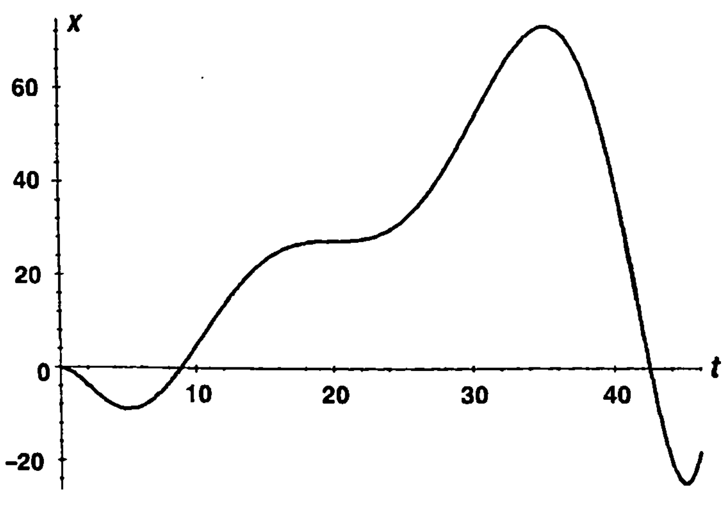
c) Encuentra los tiempos cuando ocurren máximos y mínimos de posición *versus* tiempo.

Solución

Los máximos y mínimos ocurren cuando la velocidad es cero o más específicamente cuando la partícula cambia de dirección (su velocidad cambia de signo). Así que la respuesta es la misma que el inciso anterior, es decir, no incluimos a 20 segundos en esta respuesta. Ahora, para especificar cuáles son máximos y cuáles son mínimos, tenemos que hablar de cómo cambia la velocidad, de positiva a negativa o bien de negativa a positiva. Las velocidades cambian de negativa a positiva en $t = 5$ (s) y $t = 45$ (s). Esto significa que en estos tiempos la posición tiene un mínimo. Las velocidades cambian de positiva a negativa en $t = 0$ (s) y $t = 35$ (s). Esto significa que en estos tiempos la posición tiene un máximo.

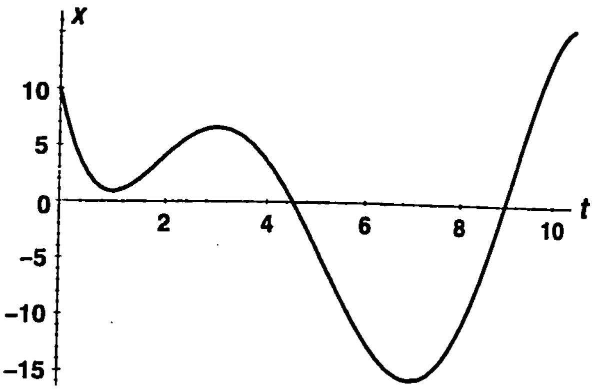
d) Construye una gráfica cualitativa de posición *versus* tiempo.

Solución



7.2. Problemas propuestos

1. La siguiente gráfica representa el movimiento de una partícula que se mueve en una línea recta donde la posición está dada en metros y el tiempo en segundos.



a) Encuentra la velocidad inicial de la partícula en forma aproximada. Muestra tu procedimiento.
Respuesta: (−20 (m/s)).

b) ¿En qué tiempo(s) la partícula está en reposo? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (t = 1 (s), t = 3 (s) y 7 (s)).

c) Encuentra los intervalos de tiempo en donde la partícula tiene una velocidad positiva. Explica tu razonamiento.

Respuesta: ($1 < t < 3$ y $7 < t < 10.4$ (s)).

d) Encuentra los intervalos de tiempo en donde la partícula tiene una velocidad negativa. Explica tu razonamiento.

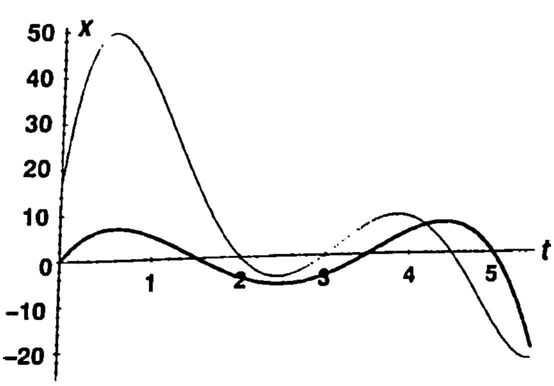
Respuesta: ($0 \leq t < 1$ y $3 < t < 7$ (s)).

e) En cada intervalo de tus respuestas en los incisos *c*) y *d*) encuentra el tiempo en los cuales la partícula lleva una velocidad máxima en magnitud.
Respuesta: (t =2, 4.8 y 9 (s)).

f) Para cada tiempo en el inciso *e*) encuentra en forma aproximada la velocidad de la partícula. Muestra tu procedimiento.
Respuesta: (v = 4, −10 y 15 (m/s)).

g) Con la información obtenida construye una gráfica con valores de velocidad.

2. La siguiente gráfica representa el movimiento de dos partículas. El eje vertical está dado en metros y el horizontal en segundos. La posición graficada con la línea más gruesa pertenece a la partícula 1. La otra curva pertenece a la partícula 2.



a) ¿En cuántas ocasiones las partículas pasan por el origen?
Respuesta: (Partícula 1: 4, partícula 2: 3).

b) ¿Cuál de las dos partículas tiene mayor velocidad inicial? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (partícula 2).

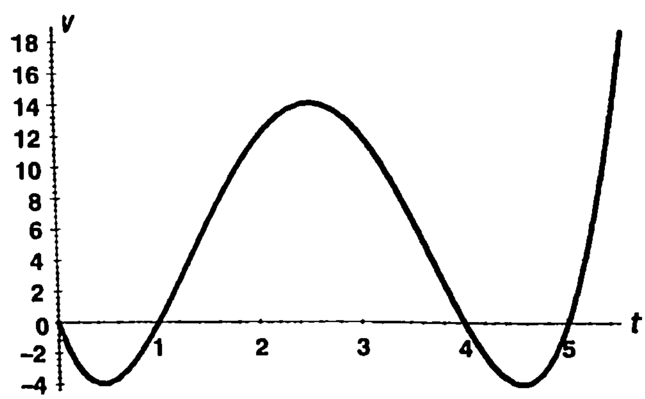
c) ¿Cuál de las dos partículas tiene mayor velocidad en t = 1 (s)? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (partícula 2).

d) ¿En qué tiempo(s) las partículas se encuentran? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (t = 4.2 (s)).

e) Encuentra el o los tiempos en que las partículas llevan la misma velocidad. Explica tu razonamiento.
Respuesta: (t = 0.6 (s), 2.5 (s), 3.5 (s) y 5(s)).

f) ¿En qué intervalo(s) las partículas llevan direcciones opuestas? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (3.5 a 4.5 (s)).

3. La velocidad de la partícula que se mueve en una línea recta se representa con la siguiente gráfica. Construye una gráfica cualitativa para la posición de la partícula.



4. Una partícula de masa m = 0.420 (kg) se mueve en una dimensión de acuerdo a la ecuación $x(t) = 3.00t^3 - 2.50\sin(t) + 3.40\exp(1.25)$(m) donde el tiempo está dado en segundos. Sabemos que la fuerza sobre un objeto está dada por $F = ma$ donde a es la aceleración de la partícula y se define como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo, $a = \frac{dv}{dt}$. Encuentra:

a) La velocidad inicial de la partícula.
Respuesta: (−2.50 (m/s)).

b) La aceleración inicial de la partícula.
Respuesta: (0 (m/s^2)).

c) La fuerza inicial sobre la partícula.
Respuesta: cero.

d) La fuerza en:
   i. $t = 1.00$ (s) *Respuesta:* ($F = 8.44$ (N))
   ii. $t = 2.00$ (s) *Respuesta:* ($F = 16.1$ (N))
   iii. $t = 3.25$ (s) *Respuesta:* ($F = 24.5$ (N))

5. El movimiento de una partícula está descrito por la función $x(t) = 10t^2 e^{-1.2t}\text{sen}(3.0t)$ en el intervalo de $t = 0$ (s) a $t = 5.5$ (s).

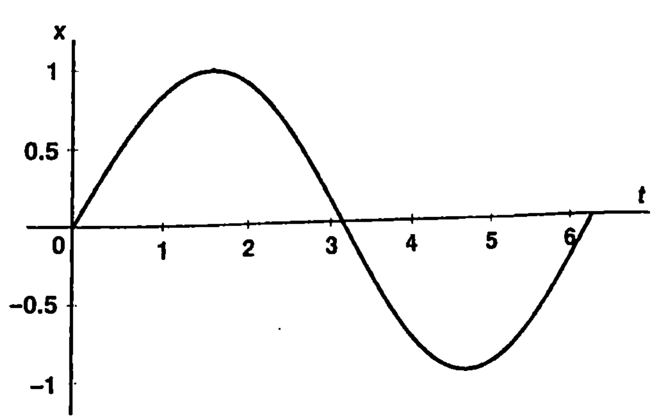
a) Dibuja la gráfica de la posición de la partícula (puedes usar una computadora para este propósito aunque no es necesario).
b) ¿En cuántas ocasiones la partícula pasa por el origen? Menciona estos tiempos y explica tu respuesta.
c) ¿En cuántas ocasiones la partícula está en reposo? Menciona estos tiempos y explica tu respuesta.
d) Encuentra los intervalos de tiempo en donde la partícula tiene una velocidad positiva. Explica tu razonamiento.
e) Encuentra los intervalos de tiempo en donde la partícula tiene una velocidad negativa. Explica tu razonamiento.
f) En forma cualitativa, construye la gráfica de su velocidad *versus* tiempo.

6. Una partícula se mueve en una dimensión de acuerdo a la ecuación $x(t) = 8.0t^3 - 18t^2 + 9.0t$ (m) donde el tiempo está dado en segundos. Sabemos que la aceleración de la partícula se define como la razón de cambio instantánea de la velocidad con respecto al tiempo $a = \frac{dv}{dt}$. Encuentra:

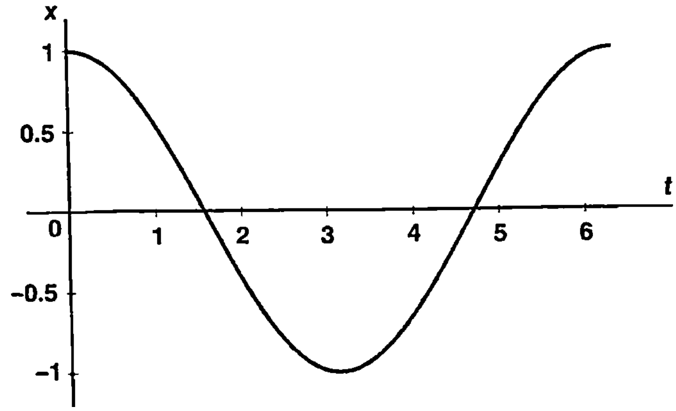
a) La posición inicial de la partícula.
b) La velocidad inicial de la partícula.
c) La aceleración inicial de la partícula.
d) La posición, velocidad y aceleración en $t = 1.0$ (s).
e) Los tiempos en que la partícula pasa por el origen.
f) Los tiempos en que la partícula está en reposo.
g) Los tiempos en que la aceleración de la partícula es nula.

7. Dibuja la gráfica cualitativa para la velocidad instantánea de las siguientes dos gráficas que representan las posiciones de una partícula en dos situaciones diferentes.

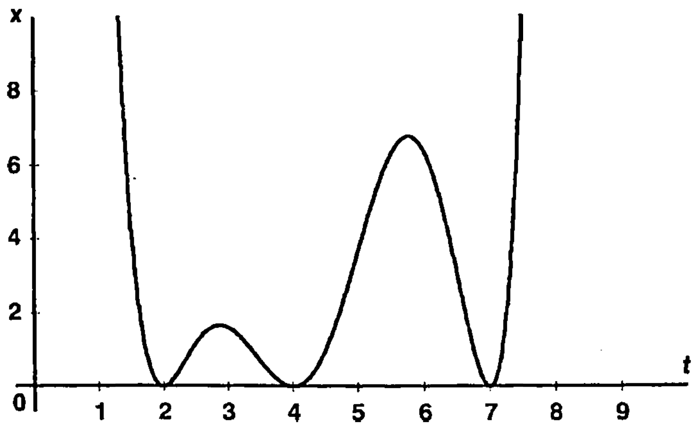
a)



b)



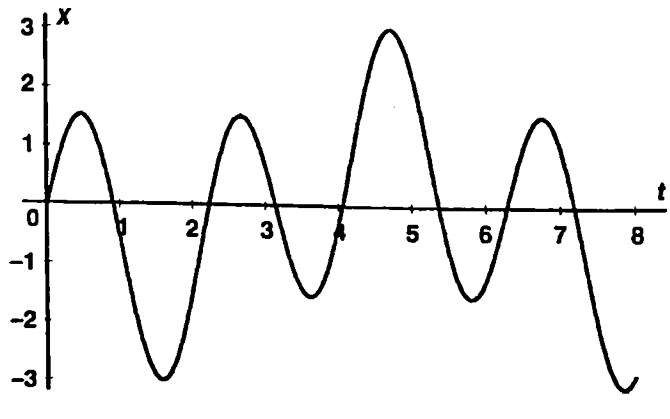
8. Se tiene la siguiente función de posición del movimiento de una partícula.



Contesta:

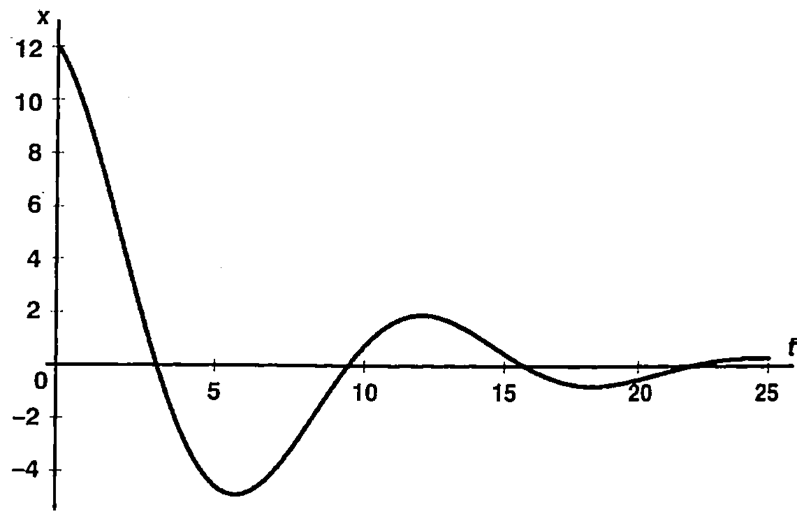
e) ¿En qué tiempos la partícula pasa por el origen?
f) ¿En qué tiempos la partícula está en reposo?
g) Grafica en forma cualitativa la función de velocidad.
h) ¿En qué tiempos la partícula tiene velocidades máximas o mínimas?

9. La siguiente gráfica representa la posición de una partícula.



a) Describe con tus propias palabras el movimiento que efectúa la partícula entre $t = 0$ y $t = 8$ (s).
b) Realiza una gráfica cualitativa de la velocidad instantánea de la partícula.

10. Considera la siguiente gráfica que describe el movimiento de una partícula



a) ¿Cuántas veces se detiene la partícula en los primeros 20 segundos?
b) Indica el signo de la posición de la partícula en:

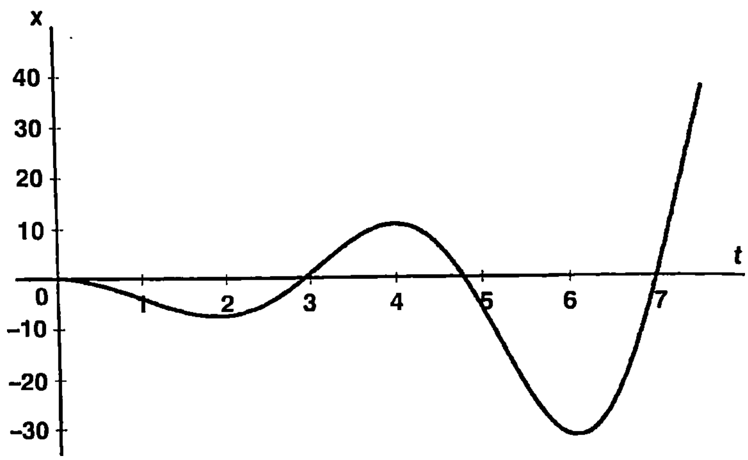
i. $t = 0$
ii. $t = 5$
iii. $t = 10$
iv. $t = 15$
v. $t = 20$

c) Indica el signo de la velocidad instantánea

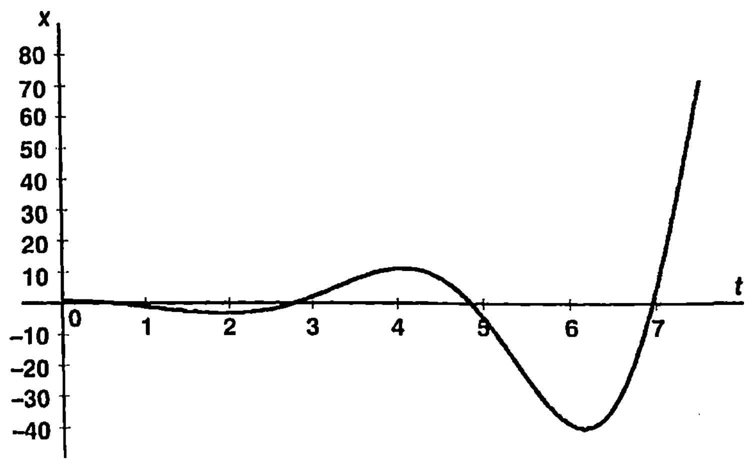
i. $t = 0$
ii. $t = 5$
iii. $t = 10$
iv. $t = 15$
v. $t = 20$

d) Construye una gráfica cualitativa de velocidad instantánea de la partícula entre $t = 0$ y $t = 25$ (s).

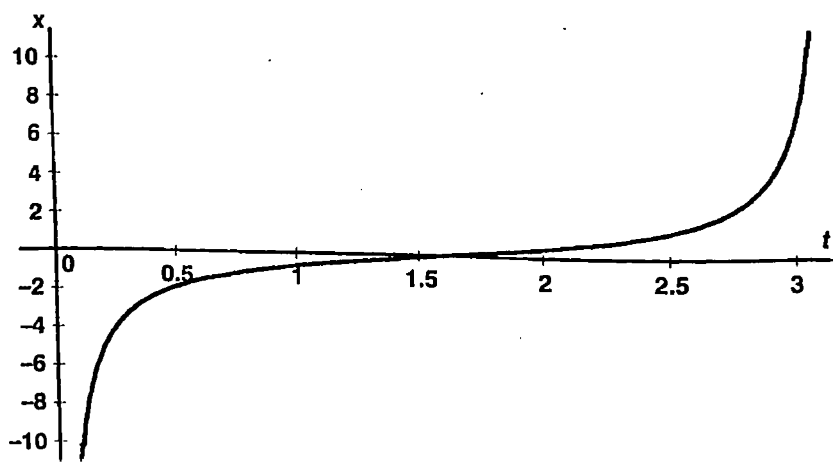
11. Describe cualitativamente la gráfica de velocidad instantánea de una partícula, si la gráfica de posición es:



12. Describe cualitativamente la gráfica de posición de una partícula, si la gráfica de su velocidad instantánea es:

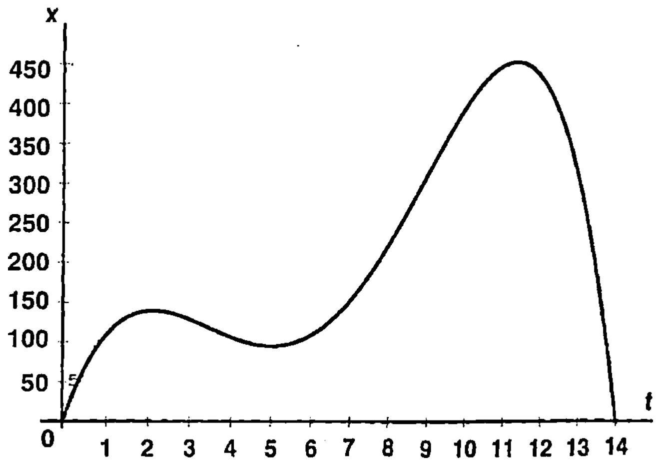


13. La posición de una partícula está representada por la siguiente gráfica. La posición está dada en metros y el tiempo en segundos.



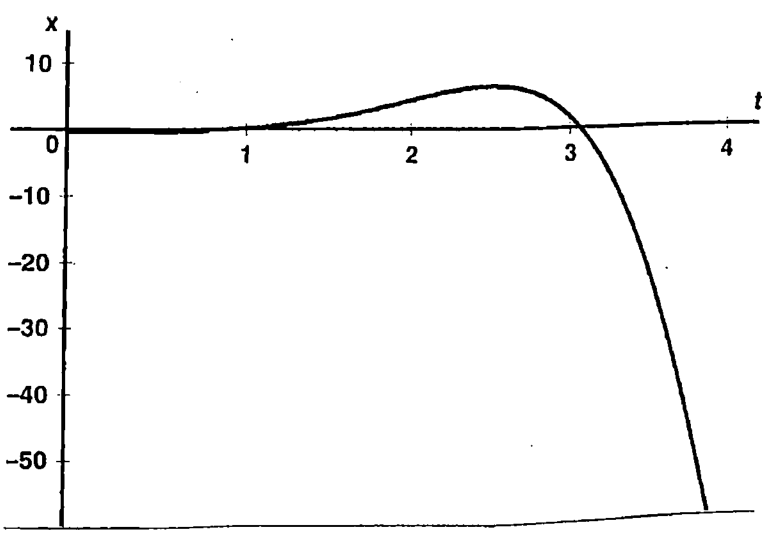
a) ¿En qué intervalos la partícula tiene una velocidad negativa?
b) ¿En qué intervalos la partícula tiene una velocidad positiva?
c) ¿En qué intervalos la partícula está en reposo?
d) Construye una gráfica cualitativa de la velocidad instantánea con respecto al tiempo.
e) Describe el movimiento.

14. Considera la siguiente gráfica que describe el movimiento de una partícula.



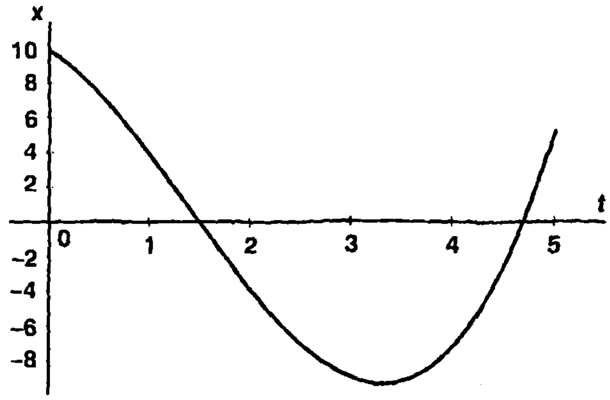
a) ¿Cuántas veces se detiene la partícula en todo el trayecto?
b) ¿En qué intervalos la partícula tiene velocidad positiva?
c) ¿En qué intervalos la partícula tiene velocidad negativa?
d) Construye una gráfica cualitativa para la velocidad instantánea de la partícula de $t = 0$ a $t = 14$ (s).

15. Considera la siguiente gráfica de posición *vs.* tiempo.



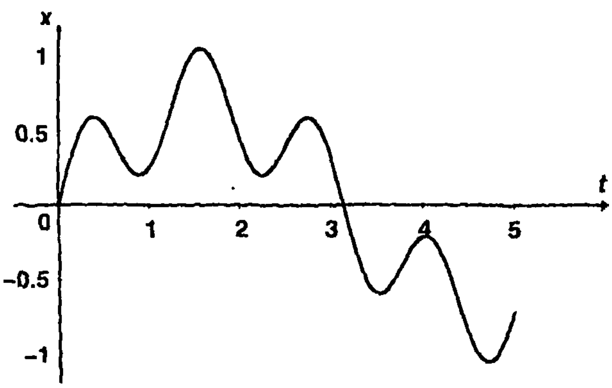
Dibuja la gráfica cualitativa para la velocidad de la partícula.

16. Considera la siguiente gráfica de posición *vs.* tiempo.



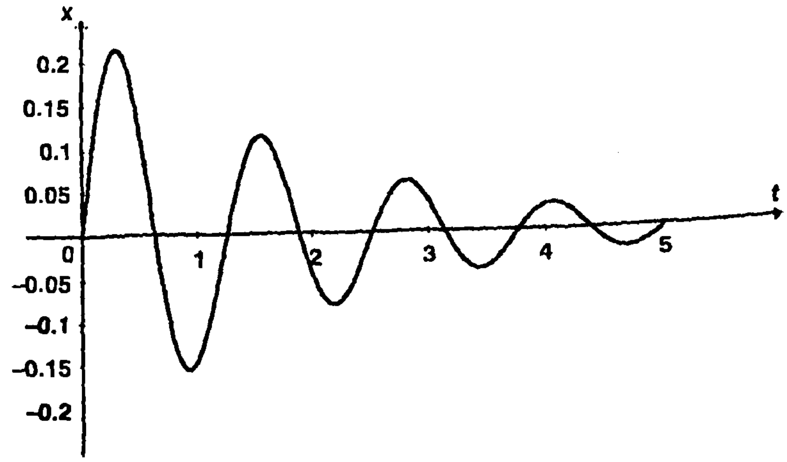
Dibuja la gráfica cualitativa para la velocidad de la partícula.

17. Considera la siguiente gráfica de posición *vs.* tiempo.



Dibuja la gráfica cualitativa para la velocidad de la partícula.

18. Se tiene la siguiente función de posición del movimiento de una partícula.

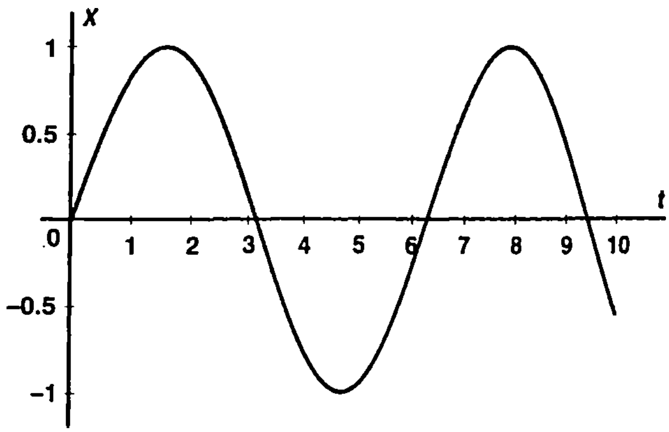


Contesta

a) ¿En qué tiempos la partícula está en reposo?
b) Estima en forma gráfica la velocidad inicial.
c) Observa que entre $t = 0.3$ y $t = 0.8$ (s) la partícula alcanza una velocidad máxima (tiempo en el que anda más rápido, independientemente del signo que tenga, en este caso es negativa); haz el cálculo.
d) Observa que entre $t = 0.8$ y $t = 1.6$ (s) la partícula alcanza una velocidad máxima (tiempo en el que anda más rápido, independientemente del signo que tenga, en este caso es positiva); haz su cálculo.
e) Con la información obtenida en los incisos anteriores, grafica con valores en el eje de velocidad, la velocidad en función del tiempo.

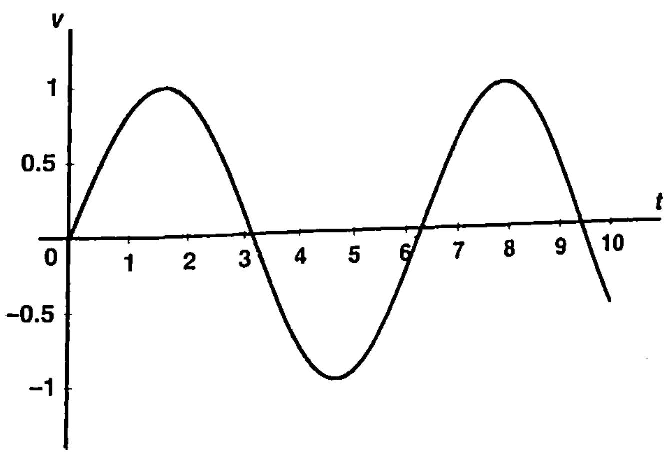
19. Contesta lo siguiente:

a) La posición de una partícula está representada con la siguiente gráfica.



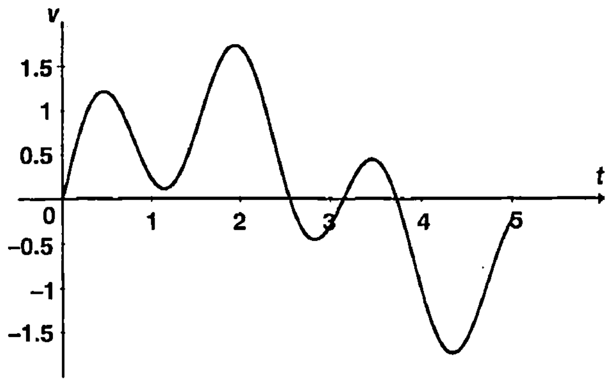
Construye una gráfica cualitativa de su velocidad instantánea.

b) La velocidad de una partícula está representada con la siguiente gráfica. Construye una gráfica cualitativa de su posición.



c) Observa tus respuestas de los incisos anteriores. ¿Cuál es la similitud de las gráficas que obtuviste?

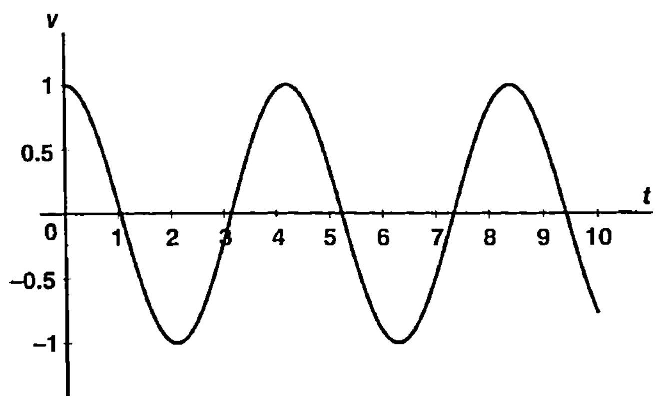
20. Considera la siguiente gráfica de velocidad *vs.* tiempo.



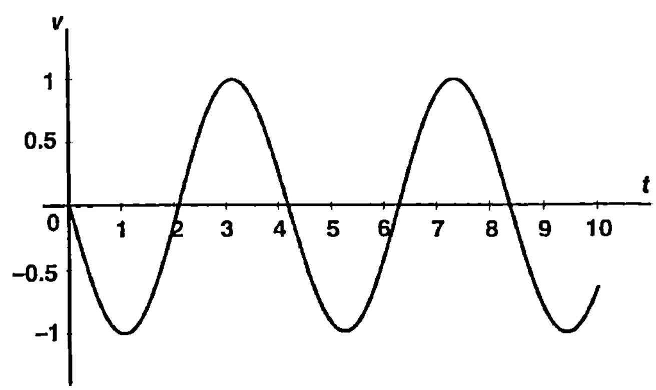
Dibuja la gráfica cualitativa para la posición de la partícula.

21. En las siguientes gráficas que representan la velocidad instantánea de una partícula en diferentes situaciones, encuentra la gráfica cualitativa para la posición de la partícula.

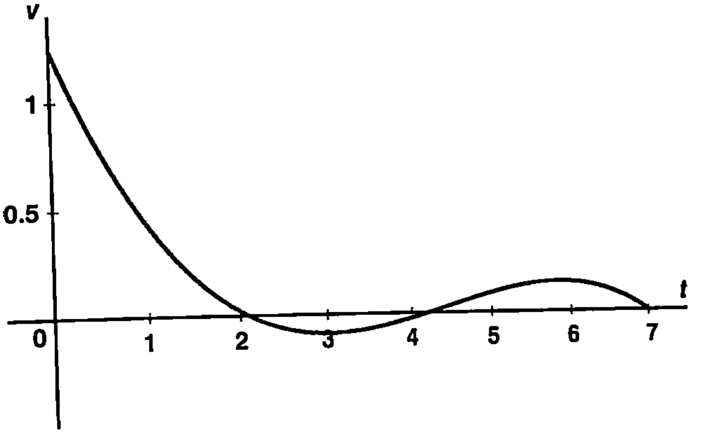
a)



b)



c)



8 PROBLEMAS DE Derivadas

8.1 Problemas resueltos

1. Calculemos la velocidad instantánea para todo tiempo para una partícula que sigue un movimiento representado con las siguientes funciones:

a) $x(t)=2t^3-3t^2-5t+2$

Solución

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(2t^3-3t^2-5t+2\right)$$
$$=(3)\left(2t^{3-1}\right)-(2)\left(3t^{2-1}\right)-(1)\left(5t^{1-1}\right)+0=6t^2-6t-5$$

b) $x(t)=2t^7-3t^5+t^3-t$

Solución

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(2t^7-3t^5+t^3-t\right)$$
$$=(7)\left(2t^{7-1}\right)-(5)\left(3t^{5-1}\right)-(3)\left(5t^{3-1}\right)-(1)\left(t^{1-1}\right)=14t^6-15t^4+3t^2-1$$

c) $x(t)=(t-3)(t+4)$

Solución

$$v(t)=\frac{dx}{di}=\frac{d}{dt}\left((t-3)(t+4)\right)$$
$$=\frac{d}{dt}\left(t^2+t-12\right)=(2)\left(t^{2-1}\right)+(1)\left(t^{1-1}\right)-0=2t+1$$

d) $x(t)=-\mathrm{sen}(t)+5\ln(t)+5$

Solución

$$v(t)=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left(-\mathrm{sen}(t)+5\ln(t)+5\right)$$
$$=-(\cos(t))+5\left(\frac{1}{t}\right)+0=-\cos(t)+\frac{5}{t}6$$

e) $x(t) = 3\cos(t) - \tan(t) + 3e^t$

Solución

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(3\cos(t) - \tan(t) + 3e^t\right)$$
$$= 3(-\operatorname{sen}(t)) - \left(\sec^2(t)\right) + 3\left(e^t\right) = -3\operatorname{sen}(t) - \sec^2(t) + 3e^t$$

2. La corriente eléctrica i se define como:

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

Donde q es la carga eléctrica y t es el tiempo. Calcula la función de corriente eléctrica de las siguientes funciones para la carga eléctrica.

a) $q(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, con a, b, c y d constantes.

Solución

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}\left(at^3 + bt^2 + ct + d\right) = 3at^2 + 2bt + c$$

b) $q(t) = 3\operatorname{sen}(t) + \cos(t)$

Solución

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(3\operatorname{sen}(t) + \cos(t)) = 3\cos(t) - \operatorname{sen}(t)$$

c) $q(t) = \ln(t)$

Solución

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(\ln(t)) = \frac{1}{t}$$

3. Una partícula realiza un movimiento unidimensional regido por la siguiente ecuación

$$x(t) = 2.0t^2 - 17t + 30$$

donde x es en metros y t en segundos. Calcula:

a) La función de velocidad instantánea.

Solución

La velocidad se define como: $v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2.0t^2 - 17t + 30\right) = 4.0t - 17$ (m/s)

b) La posición y velocidad inicial de la partícula.

Solución

Evaluamos en $t = 0$ (s)

$x(0) = 30$ (m) es la posición inicial

$v(0) = -17$ (m/s) es la velocidad inicial.

c) La posición y la velocidad de la partícula en $t =$ 1.5 (s).
Solución

Evaluamos en $t =$ 1.5 (s)
$x(1.5) = 2.0(1.5)^2 - 17(1.5) + 30 = 9.0$ (m) es la posición en $t =$ 1.5 (s)
$v(1.5) = 4.0(1.5) - 17$ (m/s) $= -11$ es la velocidad en $t =$ 1.5 (s).

d) El tiempo(s) que la partícula está en el origen.
Solución

La posición es $x = 0$ para que esté en el origen y el tiempo está dado cuando

$$2.0t^2 - 17t + 30 = 0$$

Resolviendo esta ecuación tenemos que los tiempos son dos, en $t = 2.5$ y $t = 6.0$ (s).

e) El tiempo(s) que la partícula está en reposo.
Solución

La velocidad es $v = 0$ para que esté en reposo y el tiempo está dado cuando

$$4.0t - 17 = 0$$

Resolviendo la ecuación tenemos que el tiempo es $t = 4.2$ (s).

8.2 Problemas propuestos

1. Encuentra una expresión para la velocidad instantánea, utilizando las reglas de derivación, para las siguientes funciones de posición:

a) $x(t) = \text{sen}(t) - 2t^3 + \tan(t)$
b) $x(t) = 3t^7 + 2e^t - 9t^2$
c) $x(t) = \cos(t) + 2\ln(t) - \text{sen}(8)$
d) $x(t) = t + \cos(3.4) - 2e^4 + \tan(2) - \ln(1)$

2. Encuentra la función de velocidad instantánea para la expresión:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

donde x_0, v_0 y a son constantes.

3. Calcula la velocidad instantánea para todo tiempo de una partícula que sigue un movimiento representado con las siguientes funciones:

a) $x(t) = -\frac{3}{4}t^4 + \frac{3}{2}t^3 - \frac{4}{5}t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{45}{73}$

b) $x(t)=\frac{2}{t^7}-\frac{3}{t^3}+\frac{5}{t^3}-\frac{1}{t}$

c) $x(t)=\frac{1}{3t^4}-\frac{4}{5t^3}-\frac{2}{7t^2}-\frac{1}{5t}$

4. Calcula la velocidad instantánea para todo tiempo de una partícula que sigue un movimiento representado con las siguientes funciones:

a) $x(t)=3\cos(t)-\tan(t)$

b) $x(t)=-\text{sen}(t)+5\ln(t)+5$

5. Calcula la velocidad instantánea de las siguientes funciones de posición:

a) $x(t)=at^3+bt^2+ct+d$

b) $x(t)=\frac{3}{4}t^5-\frac{1}{8}t^4-\frac{2}{5}t^2+5$

c) $x(t)=2t^{-3}+4t^{-2}-4t^{-1}+3$

d) $x(t)=4t^{\frac{1}{2}}-3t^{\frac{2}{3}}$

6. La aceleración de una partícula se define como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

$$a=\frac{dv}{dt}$$

Calcula la función de aceleración de las siguientes funciones de posición.

a) $x(t)=at^3+bt^2+ct+d$

b) $x(t)=3\text{sen}(t)+\cos(t)$

c) $x(t)=\ln(t)$

7. La aceleración de una partícula se define como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

$$a=\frac{dv}{dt}$$

Calcula la aceleración de las partículas cuyo movimiento está descrito por su función de posición o velocidad:

a) $v(t)=3t^2+5t^5$ (m/s)

b) $x(t)=2t-5t^3+5t^5$ (m)

c) $x(t) = 2\cos(t) - 3\text{sen}(t)$ (m)

d) $x(t) = 3\exp(t)$ (m)

e) $x(t) = 3\ln(t) - 3\cos(t)$ (m)

8. Una partícula realiza un movimiento unidimensional de tal manera que sigue la siguiente ecuación

$$x(t) = -1.0t^3 + 3.0t^2 + 4.0t - 2.0$$

donde x es en metros y t en segundos. Calcula:

a) La función de velocidad instantánea.
b) Si la aceleración se define como la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo, calcula la función de aceleración de la partícula.
c) La posición, velocidad y aceleración inicial de la partícula.
d) La posición, velocidad y aceleración de la partícula en $t = 1.0$ (s).
e) La posición, velocidad y aceleración de la partícula en $t = 2.5$ (s).

9. Una partícula se mueve en una dimensión de tal manera que su movimiento se representa con la siguiente ecuación

$$x(t) = 2.0t^3 - 9.0t^2 + 12t$$

donde x es en metros y t en segundos. Calcula:

a) La función de velocidad instantánea.
b) Si la aceleración se define como la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo, calcula la función de aceleración de la partícula.
c) El tiempo(s) en que la partícula está en el origen.
d) El tiempo(s) en que la partícula está en reposo.
e) El tiempo(s) en que la partícula no se acelera.

10. Una partícula se mueve con la siguiente función de posición

$$x(t) = \exp(t) - 1$$

donde x es en metros y t en segundos. Calcula:

a) ¿Existe algún tiempo en que la partícula pase por el origen?
b) ¿Existe algún tiempo en que la partícula esté en reposo?

11. Una partícula se mueve con la siguiente función de posición

$$x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t \text{ (m)}$$

donde t está dado en segundos. Calcula:

a) Su posición y velocidad inicial.
b) Su posición y velocidcd en $t = 1$ (s).

c) Su posición y velocidad en $t = 3$ (s).
d) Los tiempos en donde la partícula pasa por el origen.
e) Los tiempos en donde la partícula está en reposo.

12. Una partícula se mueve con la siguiente función de posición

$$x(t) = t^3 - 9t \text{ (m)}$$

donde t está dado en segundos. Calcula:

a) Su posición y velocidad inicial.
b) Su posición y velocidad en $t = 2$ (s).
c) Su posición y velocidad en $t = 4$ (s).
d) Los tiempos en donde la partícula pasa por el origen.
e) Los tiempos en donde la partícula está en reposo.

13. Una partícula realiza un movimiento oscilatorio unidimensional siguiendo la ecuación

$$x(t) = 3.00\text{sen}(1.00t)$$

donde x es en metros y t en segundos.

a) Encuentra al menos tres tiempos en que la partícula pasa por el origen.
b) Encuentra al menos tres tiempos en que la partícula llega al reposo.

14. El momento lineal de una partícula bajo la acción de una fuerza está dado por

$$p = 1.00t^2 - 3.00t + 2.00 \text{ (kg}\cdot\text{m/s)}$$

donde el tiempo está dado en segundos. De acuerdo a la definición de la fuerza

$$F = \frac{dp}{dt}$$

calcula:

a) La fuerza sobre la partícula en $t = 0$ (s).
b) La fuerza sobre la partícula en $t = 2.50$ (s).
c) El tiempo(s) en que el momento lineal es cero.
d) El tiempo(s) en que la fuerza sobre la partícula es nula.

15. Considera la ecuación

$$q(t) = 1.00t^5 - 1.00\sin(t) + 2.50\sin(3.23) \text{ (C)}$$

con t medido en (s) que representa la carga eléctrica como función del tiempo. Se define la corriente eléctrica como la derivada de la carga eléctrica, es decir,

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Calcula la corriente eléctrica para todo tiempo t.

16. Una partícula de masa $m = 0.200$ (kg) se mueve con una dimensión con esta función de posición

$$x(t) = 2.00t^2 - 3.00t + 2.00 \ \text{(m)}$$

donde t es dado en segundos. Si se sabe que la fuerza sobre la partícula depende de su aceleración de tal manera que

$$F = ma$$

donde la aceleración se define como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo

$$a = \frac{dv}{dt}$$

Encuentra la fuerza sobre la partícula en el SI en:

a) $t = 0$ (s).
b) $t = 1.00$ (s),
c) $t = 3.00$ (s).

9 PROBLEMAS DE Teorema de la velocidad promedio

9.1 Problemas resueltos

1. Un auto VW Golf puede acelerar de 0 a 80 (km/h) en 8.0 segundos. Estima:

a) La distancia necesaria para lograrlo.

Solución

Si asumimos que la velocidad del Golf aumentó en forma uniforme, podemos encontrar la distancia recorrida por medio del teorema de la velocidad promedio.

$$\Delta x = v_p \Delta t$$

donde

$$v_p = \frac{1}{2}(0 + 80) = 40 \ (\text{km/h}) = 11 \ (\text{m/s})$$

entonces, tenemos

$$\Delta x = (11)(8.0) = 89 \ (\text{m})$$

b) El tiempo que tarda en pasar de 40 a 65 (km/h).

Solución

Que la velocidad esté aumentando en forma lineal significa que aumenta a un ritmo de $\frac{80}{8.0} =$ 10 (km/h/s). Se lee 10 kilómetros por hora cada segundo. Aquí tenemos que la velocidad aumentó de 40 a 65 (km/h), significa entonces que aumentó 25 (km/h) por lo que el tiempo necesario fue de 2.5 segundos.

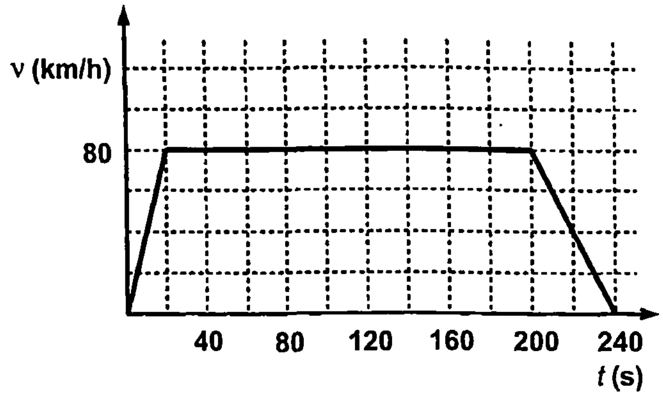
c) La distancia que recorre cuando pasa de 20 a 60 (km/h).

Solución

Primero calculemos el tiempo necesario. Hay un cambio de 40 (km/h), entonces el tiempo necesario fue de 4.0 (s). Con el teorema de la velocidad promedio encontramos la distancia

$$v_p = \frac{1}{2}(20 + 60) = 40 \ (\text{km/h}) = 11 \ (\text{m/s})$$
$$\Delta x = v_p \Delta t = (11)(4.0) = 44 \ (\text{m})$$

2. La siguiente gráfica describe el cambio de velocidad de un tren que viaja en línea recta.



Donde la velocidad está medida en (km/s) y el tiempo en (s).

a) Describe con tus propias palabras el movimiento del tren.

Solución

El tren parte del reposo incrementando su velocidad de manera uniforme hasta alcanzar una velocidad de 80 (km/h) en 20 segundos. Después se mantiene a velocidad constante hasta los 180 segundos más donde empieza a frenar disminuyendo su velocidad de manera uniforme hasta detenerse después de 40 segundos.

b) Encuentra el desplazamiento del tren mientras viaja a velocidad constante.

Solución

La velocidad es constante así que el desplazamiento está dado por

$$\begin{aligned} \Delta x &= v\Delta t = (80\ (\text{km/h}))(180\,(\text{s})) \\ &= (22\,(\text{m/s}))(180\,(\text{s})) = 4.0\times 10^3\ (\text{m}) \end{aligned}$$

c) Encuentra el desplazamiento total del tren (distancia recorrida) desde que parte hasta que se detiene.

Solución

En el primer intervalo de 20 segundos la velocidad promedio y la distancia recorrida es

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{1}{2}(0+80) = 40\,(\text{km/h}) = 11\ (\text{m/s}) \\ \Delta x &= v_p\Delta t = (11)(20) = 2.2\times 10^2\ (\text{m}) \end{aligned}$$

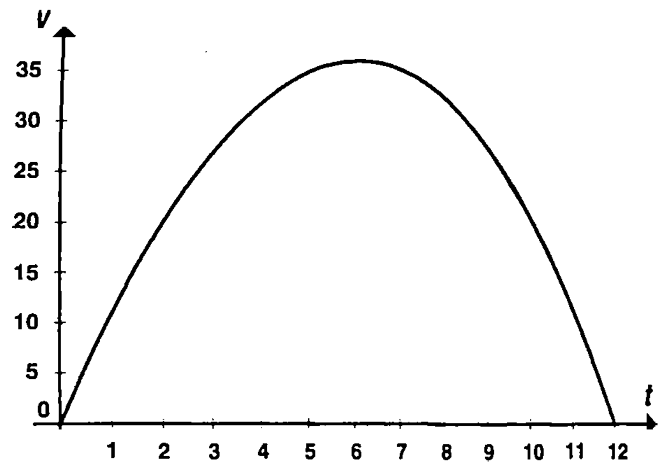
En el último intervalo de 40 segundos tenemos

$$\begin{aligned} v_p &= \frac{1}{2}(80+0) = 40\ (\text{km/h}) = 11\ (\text{m/s}) \\ \Delta x &= v_p\Delta t = (11)(40) = 4.4\times 10^2\ (\text{m}) \end{aligned}$$

por lo que la distancia total recorrida es

$$\Delta x_{total} = 4.0\times10^3 + 2.2\times10^2 + 4.4\times10^2 = 4.7\times10^3\,(\mathrm{m})$$

3. La velocidad de una partícula está representada por medio de la siguiente gráfica.



Calcula la distancia que recorre entre $t = 0$ a $t = 12$ (s).

Solución

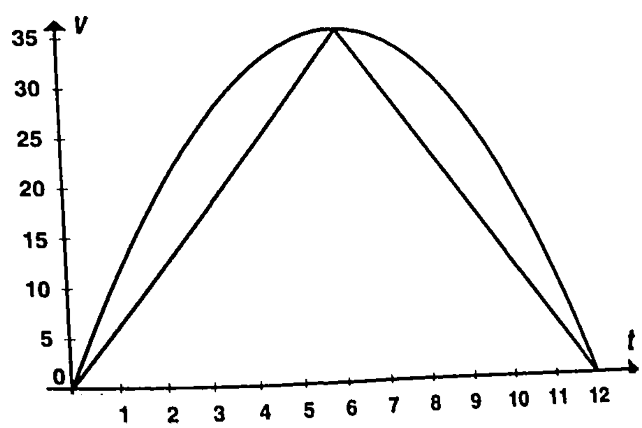
No podemos calcular de forma exacta la distancia que recorre pero sí podemos obtener una aproximación tomando intervalos. Vamos a hacer una aproximación con tan sólo dos intervalos, es decir, vamos a asumir que la velocidad aumenta de manera uniforme desde $v = 0$ en $t = 0$ a $v = 35$ (m/s) en $t = 6.0$ (s) y después disminuye uniformemente a $v = 0$ en $t = 12$ (s).

Con esto, tenemos que la distancia recorrida es

$$d = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

$$d \approx v_{p1}\Delta t_1 + v_{p2}\Delta t_2 \approx (6.0-0) + \left(\frac{35+0}{2}\right)(12-6.0) \approx 210\ (\mathrm{m})$$

Gráficamente, estamos calculando el área bajo las dos rectas, en lugar de calcular el área bajo la curva de velocidad como lo muestra la siguiente figura.



En caso de querer una mejor aproximación tenemos que tomar más intervalos y asumir que en cada intervalo la velocidad cambió uniformemente. Puedes hacerlo con cuatro para ver qué resulta.

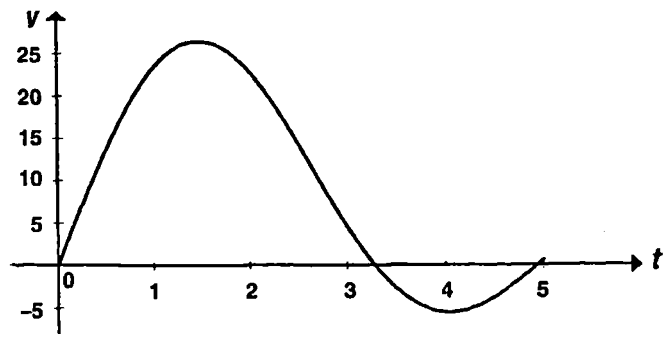
4. La siguiente ecuación representa la velocidad de una partícula.

$$v = 15\text{sen}(\frac{2}{\pi}t) + 15\text{sen}(\frac{4}{\pi}t)\,(\text{m/s})$$

donde t está medido en segundos. Si la partícula se mueve desde $t = 0$ a $t = 5.0$ (s), contesta lo siguiente:

a) Construye una gráfica del movimiento desde $t = 0$ a $t = 5.0$ (s).

Solución



b) Calcula el desplazamiento total de la partícula en su recorrido.

Solución

Lo que vamos a hacer en este problema es aproximar la curva a segmentos de recta con el teorema de la velocidad promedio. Vamos a usar cuatro segmentos en la primera parte del movimiento cuando su velocidad es positiva) y otros cuatro intervalos en el intervalo cuando la velocidad es negativa. Tomemos el primer intervalo de 0 a 0.8 (s), el segundo de 0.8 a 1.6, el tercero de 1.6 a 3.3 y el cuarto de 2.2 a 3.3. En la segunda parte del movimiento, el primer intervalo de 3.3 a 3.7, el segundo de 3.7 a 4.0, el tercero de 4.0 a 4.4 y el último de 4.4 a 4.9. Entonces tenemos que:

$$\Delta x = \frac{v(0) + v(0.8)}{2}(0.8 - 0) + \frac{v(0.8) + v(1.6)}{2}(1.6 - 0.8) + \frac{v(1.6) + v(2.2)}{2}(2.2 - 1.6)$$
$$+ \frac{v(2.2) + v(3.3)}{2}(3.3 - 2.2) + \frac{v(3.3) + v(3.7)}{2}(3.7 - 3.3) + \frac{v(3.7) + v(4.0)}{2}(4.0 - 3.7)$$
$$+ \frac{v(4.0) + v(4.4)}{2}(4.4 - 4.0) + \frac{v(4.4) + v(5.5)}{2}(5.5 - 4.4)$$
$$\Delta x = \frac{v(0) + v(0.8)}{2}(0.8 - 0) + \frac{v(0.8) + v(1.6)}{2}(1.6 - 0.8) + \frac{v(1.6) + v(2.2)}{2}(2.2 - 1.6)$$
$$+ \frac{v(2.2) + v(3.3)}{2}(3.3 - 2.2) + \frac{v(3.3) + v(3.7)}{2}(3.7 - 3.3) + \frac{v(3.7) + v(4.0)}{2}(4.0 - 3.7)$$
$$+ \frac{v(4.0) + v(4.4)}{2}(4.4 - 4.0) + \frac{v(4.4) + v(5.5)}{2}(5.5 - 4.4)$$
$$\Delta x = \frac{0 + 20}{2}(0.8) + \frac{20 + 26}{2}(0.8) + \frac{26 + 20}{2}(0.6) + \frac{20 + 0}{2}(1.1) + \frac{0 + (-4.4)}{2}(0.4)$$
$$+ \frac{(-4.4) + (-5.5)}{2}(0.3) + \frac{(-5.5) + (-4.4)}{2}(0.4) + \frac{(-4.4) + 0}{2}(0.5)$$

$\Delta x = 8.0 + 18 + 14 + 11 - 0.9 - 1.5 - 2.0 - 1.1$
$\Delta x = 51 - 5.5 = 46 \text{ (m)}$

c) Calcula la distancia total que recorre la partícula.

Solución

Observa que cuando la velocidad es positiva la partícula se mueve a la derecha y cuando la velocidad es negativa, la partícula se mueve a la izquierda. De acuerdo con esto, la distancia recorrida es la suma aritmética de la distancia que recorre a la derecha más la distancia que recorre a la izquierda. Es decir, $\Delta x = 55 + 5.5 = 60$ (m).

9.2 Problemas propuestos

1. Se deja caer una pelota en una alberca desde el trampolín de 10.0 (m). La pelota aumenta su velocidad de manera uniforme en un tiempo de 1.43 (s) hasta chocar con el agua. A partir de ahí, mantiene su velocidad constante hasta llegar al fondo de la alberca en 1.00 (s) adicional.

a) Construye una gráfica de velocidad de la partícula en función del tiempo tomando como velocidad positiva cuando la pelota cae.

b) Calcula la velocidad que tiene la pelota cuando choca con el agua. Muestra tu procedimiento.
Respuesta: (14 (m/s)).

c) Calcula la profundidad de la alberca. Muestra tu procedimiento.
Respuesta: (14 (m)).

2. Un automóvil acelera desde el reposo hasta una velocidad de 96 (km/h) en 8.0 (s). Al momento de alcanzar esa velocidad frena de tal manera que se detiene en 4.0 (s).

a) ¿Cuál es la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo en el intervalo cuando la velocidad aumenta? Explica tu razonamiento y muestra tu procedimiento.

Respuesta: $\left(12 \left(\frac{\text{km/h}}{\text{s}}\right)\right)$

b) ¿Cómo se interpreta el número que encontraste en *a*)?

c) ¿Cuál es la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo en el intervalo cuando la velocidad disminuye? Muestra tu procedimiento.

Respuesta: $\left(-24 \left(\frac{\text{km/h}}{\text{s}}\right)\right)$

d) ¿Qué distancia necesitó para pasar de 30 a 70 (km/h)? Explica tu razonamiento y muestra tu procedimiento.
Respuesta: (45 (m)).

e) ¿Qué distancia necesitó para pasar de 70 a 30 (km/h)? Muestra tu procedimiento.
Respuesta: (23 (m)).

f) Calcula la distancia total recorrida por el auto. Muestra tu procedimiento.
Respuesta: (1.6×10^2 (m)).

3. El "Cabrito" Arellano está a dos metros del portero, tira durísimo... pero Oswaldo Sánchez la detiene. Cuando el "Cabrito" patea el balón, su pie hace contacto con el esférico por 0.010 segundos, y cuando Oswaldo la detiene, sus manos tocan la pelota por 34 cm) antes de que se detenga realmente. El tiro viajó los dos metros a una velocidad de 80 (km/h). Una vez con el control del balón, Oswaldo la retiene por 0.10 (s) en lo que ve libre a su defensa, al mismísimo Joel, el "Tiburón" Sánchez, que está a 1.5 (m) de él, y en la misma dirección de donde tiró el "Cabrito", de modo que ahora la pelota viaja en sentido opuesto. Se la pasa a 30 (km/h) y el tiempo que tarda en darle esa velocidad, haciendo contacto con su brazo, es de 0.050 (s). El "Tiburón" la detiene en 12 (cm).

a) ¿Cuánto tiempo le toma a la pelota recorrer los dos metros del "Cabrito" a Oswaldo? Muestra tu procedimiento.
Respuesta: (0.090 (s)).

b) ¿Cuánto tiempo tarda la pelota en recorrer los 34 (cm) en las manos de Oswaldo para detenerse? Muestra tu procedimiento.
Respuesta: (0.031 (s)).

c) ¿En cuánto tiempo llega la pelota de las manos de Oswaldo al pie del "Tiburón"?
Respuesta: (0.18 (s)).

d) ¿Cuánto tiempo pasa desde que la pelota hace contacto con el pie del "Tiburón" hasta que se detiene 12 (cm) después?
Respuesta: (0.029 (s)).

e) Construye una gráfica de velocidad *versus* tiempo para la pelota.

f) ¿Qué distancia recorre el balón haciendo contacto con el pie del "Cabrito"?
Respuesta: (0.11 (m)).

g) ¿Qué distancia recorre el balón en las manos de Oswaldo antes de que lo suelte?
Respuesta: (0.21 (m)).

h) Considerando que la pelota siempre estuvo al ras del suelo, que no hubo movimientos del balón que no se mencionaran y que el "Cabrito" comenzó a hacer contacto con el balón un poco más lejos que dos metros del portero, de modo que el balón realmente viajó dos metros desde que el "Cabrito" hace el último contacto hasta que Oswaldo hace su primer contacto, ¿qué distancia recorre el balón en el total del recorrido? Muestra tu procedimiento.
Respuesta: (4.2 (m)).

i) ¿Cuál es el desplazamiento de la pelota en el total del recorrido? Muestra tu procedimiento.
Respuesta: (0.62 (m)).

4. Contesta las siguientes preguntas:

a) ¿Qué es velocidad promedio?

b) ¿Qué es velocidad media?
c) ¿Qué diferencia existe entre velocidad media y promedio?
d) ¿Qué tipo de movimiento podemos analizar con la velocidad promedio?
e) ¿Qué tipo de movimiento podemos analizar con la velocidad media?
f) ¿En qué caso la velocidad media es igual a la velocidad promedio de un movimiento?

5. Considera el movimiento de una partícula descrito por la siguiente ecuación:

$$x(t) = a + bt + ct^2$$

donde el tiempo está medido en (s).

a) ¿Qué unidades deben tener las constantes *a, b, c* para que la ecuación sea dimensionalmente correcta?
b) Calcula la velocidad media de la partícula entre t_1 y t_2.
c) Calcula la velocidad instantánea de la partícula para todo tiempo t.
d) Calcula la velocidad promedio de la partícula entre los tiempos t_1 y t_2.
e) ¿Podrías asegurar con este resultado que siempre la velocidad media es igual a la velocidad promedio?

6. Una partícula se mueve en una línea recta de tal manera que su movimiento se representa por medio de la siguiente función.

$$x(t) = 2.00\mathrm{sen}(1.00t)$$

donde x y t están dados en metros y segundos respectivamente.

a) Calcula la velocidad media de la partícula entre $t = 1.00$ y $t = 2.00$ (s).
b) Calcula la velocidad instantánea de la partícula para todo tiempo.
c) Calcula la velocidad promedio de la partícula entre $t = 1.00$ y $t = 2.00$ (s).
d) Compara la velocidad media y promedio de la partícula en el intervalo.

7. Un automóvil acelera desde el reposo hasta una velocidad de 120 (km/h) en 12.0 (s).

a) ¿Cuánto tiempo tarda en pasar de 40 a 60 (km/h)?
b) ¿Qué distancia recorre en pasar de 40 a 60 (km/h)?

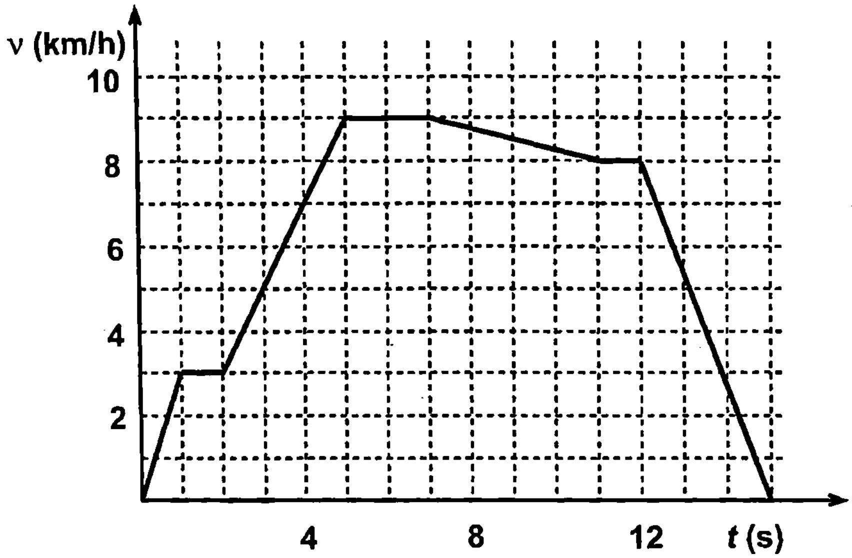
8. *Superman* detiene un tren en el cual viaja Luisa Lane, para salvarlo de caer a un precipicio. Si el tren viajaba a 97 (km/h) y lo detiene cuando estaba a tan sólo 13 (cm) del precipicio, calcula el tiempo que le demoró detenerlo.

9. *Superman* puede lanzar una roca a 322 (km/h). Suponiendo que la roca permanece en su mano durante 1.5 (m), calcula cuánto dura el lanzamiento.

10. Se deja caer una pelota desde la azotea de un edificio. La pelota tarda 4.52 (s) en caer y cae con una velocidad de 44.3 (m/s). ¿Cuál es la altura del edificio?

11. Un automóvil acelera desde el reposo hasta una velocidad de 100 (km/h) en 12.0 (s). Al momento de alcanzar esa velocidad frena de tal manera que se detiene en 7.0 (s). Calcula la distancia total recorrida por el auto.

12. Calcula la distancia total recorrida por la partícula en la siguiente gráfica de velocidad.



13. Un vehículo es capaz de alcanzar 100 (km/h) en 9.0 (s).

a) Dibuja una gráfica de velocidad donde se observe esta situación.
b) Calcula la distancia recorrida por el vehículo en los primeros 5.0 (s).
c) Calcula la distancia recorrida por el vehículo los últimos 4.0 (s).
d) Calcula la distancia que recorre el vehículo para ir desde 65 a 80 (km/h).

14. Se deja caer una pelota en una alberca desde un trampolín de 10.0 (m). Al caer la pelota al agua, ésta lleva una velocidad v la cual se mantiene constante hasta tocar el fondo de la alberca. Si el tiempo que tarda en tocar el agua es de 1.43 (s) y el tiempo que tarda desde que toca el agua hasta llegar al fondo es de 1.00 (s). Calcula la profundidad de la alberca.

15. Una gota de agua se forma aproximadamente a 1.0×10^3 (m) de altura, partiendo del reposo, llegando a la superficie de la Tierra con una velocidad de 10 (m/s).

a) Suponiendo que el cambio de velocidad se realiza uniformemente, calcula el tiempo que viaja la gota antes de tocar el suelo.
b) Una teoría un poco más realista dice que el primer segundo (1.0 (s)) de viaje de la gota alcanza una velocidad de 10 (m/s) y desde ahí en adelante viaja con una velocidad constante. Dibuja una gráfica cualitativa de esta situación y calcula el tiempo que viaja la gota.
c) ¿Qué crees que hace que la gota de agua caiga durante casi todo su trayecto con velocidad constante?

10 PROBLEMAS DE Movimiento planetario

10.1 Problemas resueltos

1. Explica por qué la segunda Ley de Kepler tiene como consecuencia que los planetas de órbitas circulares se muevan a velocidades constantes.

Solución

En la órbita circular de un planeta, el Sol está en el centro del círculo. Tomando dos áreas iguales en diferentes partes del círculo, tenemos que los lados de esas áreas son iguales ya que son iguales al radio del círculo. Esto significa que el arco también debe ser igual. De acuerdo a la segunda Ley de Kepler, el tiempo transcurrido es el mismo y como el arco es el mismo, la velocidad debe ser constante.

2. La Luna orbita alrededor de la Tierra a una distancia media de aproximadamente 386 000 (km), con un periodo de 27.3 (día). ¿Cuál sería el periodo de un satélite artificial si fuera colocado en la órbita de la Tierra a una distancia media de 198,000 (km)?

Solución

Hay que reconocer que la Luna y el satélite forman parte de los satélites alrededor de la Tierra. Esto significa que la relación de la tercera ley de Kepler se mantiene tanto para el satélite natural como para el artificial. Usemos la tercera ley de Kepler e igualemos la relación en ella expresada

$$\frac{D_L^3}{T_L^2} = \frac{D_S^3}{T_S^2}$$

tenemos entonces que

$$\begin{aligned} T_S^2 &= T_L^2 \frac{D_S^3}{D_L^3} \\ &= (27.3\,(\text{día}))^2 \frac{(198000\,(\text{km}))^3}{(386000(\text{km}))^3} = 100\ (\text{día}^2) \\ T_S &= 10.0\ (\text{día}) \end{aligned}$$

3. Teniendo en cuenta los datos del problema anterior, calcula el radio de la órbita que tendría que tener un satélite de la Tierra para que permanezca en una localización fija, es decir, siempre directamente sobre el ecuador. Este tipo de órbita se llama sincronía de la Tierra y es muy útil para comunicaciones.

Solución

Para que el nuevo satélite se mantenga en la misma posición con respecto a la Tierra, debe rotar junto con ella. Es decir, el periodo del satélite debe ser de un día. Con esta información y usando los datos de la Luna tenemos

$$\frac{D_L^3}{T_L^2}=\frac{D_S^3}{T_S^2}$$

$$\begin{aligned} D_S^3 &= D_L^3\,\frac{T_S^2}{T_L^2} \\ &= (386000\ (\mathrm{km}))^3\,\frac{(1.0\ (\mathrm{día}))^2}{(27.3\,(\mathrm{día}))^2} = 7.7\times 10^{13}\ (\mathrm{km}^3) \\ D_S &= 4.2\times 10^4\ (\mathrm{km}) \end{aligned}$$

10.2. Problemas propuestos

1. Investiga cuál es el periodo de rotación de Urano alrededor del Sol. Calcula el porcentaje de área, con respecto al área total, que barre una línea imaginaria desde Urano al Sol en un año terrestre.

2. Investiga el periodo de la Luna alrededor de la Tierra y la distancia de la Luna a la Tierra. Calcula:

a) La distancia a la cual debes colocar un satélite estacionario alrededor de la Tierra (un satélite estacionario es aquél que siempre está en la misma posición con respecto a la Tierra).
b) El periodo de un satélite que se coloca a un tercio de la distancia entre la Luna y la Tierra.

3. En el sistema planetario de la estrella X hay 5 planetas *Firix, Secix, Thiix, Fouix* y *Fifix*. La siguiente tabla consiste en los datos astronómicos de este sistema. Completa los datos faltantes de la tabla.

Planeta de X	*Distancia medida a X (UA)*	*Periodo (año)*
Firix	0.76	
Secix	1.2	0.80
Thiix		1.8
Fouix		3.7
Fifix	5.6	

4. De acuerdo a la tabla del problema anterior, y asumiendo órbitas circulares para todos los planetas de X, contesta:

a) ¿Cuál es el porcentaje de área que barre *Fouix* alrededor de X durante el periodo de *Fifix*?

b) Calcula en (UA^2) el área que barre *Fouix* alrededor de X durante el periodo de *Fifix*.

c) Calcula el área que barre *Thiix* en 0.50 (año).

d) Si se descubriera un nuevo planeta de X a una distancia de 7.8 (UA), cuál sería su periodo? ¿Cómo lo llamarías?

5. Investiga cuál es el periodo de rotación de Neptuno alrededor del Sol. Calcula el porcentaje de área, con respecto al área total, que barre una línea imaginaria desde Neptuno al Sol en medio año terrestre.

6. **El planeta Neptuno.** Después del descubrimiento del planeta Urano, se notó que su órbita no estaba de acuerdo totalmente con la predicha por las leyes de Newton. De esta manera, fue predicho que otro planeta más distante, y bastante grande, debía estar perturbando la órbita de Urano. Neptuno fue observado primero por Galle y d'Arrest el 23 de septiembre de 1846 muy cerca del lugar predicho por otros dos astrónomos, Adams y Le Verrier, que obtuvieron este dato basándose de las posiciones observadas de Júpiter, Saturno y Urano. Una disputa internacional se levantó entre el inglés y francés (aunque no, al parecer, entre Adams y Le Verrier, personalmente) alrededor de la prioridad y el derecho para nombrar al nuevo planeta; ellos se acreditan ahora conjuntamente el descubrimiento de Neptuno. Este planeta por bastante tiempo fue el planeta de nuestro sistema más distante del Sol y hace un par de meses pasó nuevamente a ocupar ese lugar el planeta Plutón.

a) Investiga el número y nombres de los satélites de Neptuno.

b) En particular Neptuno tiene dos planetas: Larissa y Tritón. Utilizando los datos de diámetro de la órbita y el periodo, encuentra la constante *K* asociada a este planeta.

7. El planeta Marte se encuentra a una distancia aproximada de 1.52 (UA) del Sol. ¿Cuánto tiempo le toma a este planeta dar una vuelta completa al Sol? Indica claramente cada uno de los pasos de tu procedimiento.

8. El planeta Marte tiene dos satélites naturales: *Phobos* y *Deimos*. Completa la siguiente tabla de datos:

Satélite	*Phobos*	*Deimos*
Distancia a Marte (km)	9,378	23,459
Periodo orbital (día)	0.31910	

9. Supongamos que nos interesa observar constantemente una región del planeta Marte, para ello debemos poner un satélite artificial alrededor del planeta. Si el periodo rotacional de Marte es de 24.6 horas, ¿a qué distancia del planeta debemos poner el satélite?

10. Si encontráramos un planeta a una distancia de 2.00 (UA) del Sol, ¿podemos asegurar que el tiempo que demora en darle una vuelta es de dos años? Fundamenta tu respuesta.

11. Calcula el periodo de un satélite artificial en una órbita de 299,000,000 (km) alrededor del

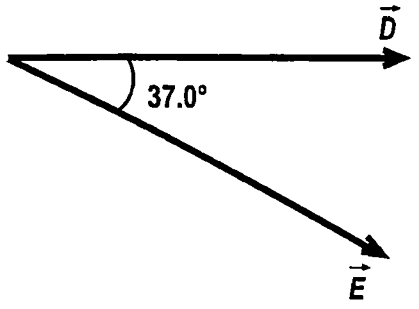
Sol. Ayuda: No te olvides de cambiar unidades, para ello investiga la distancia en kilómetros entre la Tierra y el Sol.

12. La Luna orbita alrededor de la Tierra a una distancia media de aproximadamente 386,000 (km), con un periodo de 27.3 (día). ¿Cuál sería la distancia media de un satélite artificial si fuera colocado en la órbita de la Tierra con un periodo de 10.2 (día)?

11 PROBLEMAS DE Vectores

11.1 Problemas resueltos

1. Se tienen dos vectores como los muestra la siguiente figura:



Donde las magnitudes de los vectores son:

$$D = 1.71$$
$$E = 2.04$$

Calcula (con el método del paralelogramo para las sumas y restas) la magnitud y dirección (ángulo con respecto a $\vec{D}$) de las siguientes operaciones:

a) Vector $2\vec{D}$

Solución

El vector $2\vec{D}$ tiene magnitud $2D = 3.42$ y la misma dirección que $\vec{D}$.

b) Vector $-\frac{3}{2}\vec{E}$.

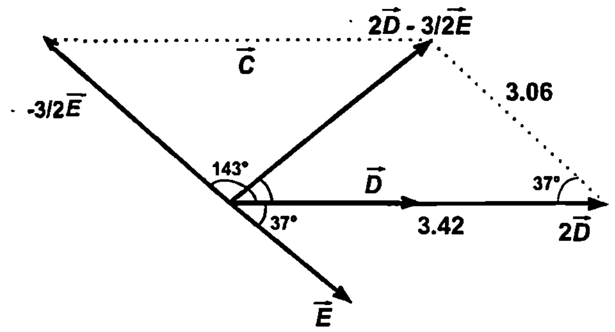
Solución

El vector $-\frac{3}{2}\vec{E}$ tiene magnitud $\frac{3}{2}E = 3.06$ y tiene una dirección de 180° con respecto a $\vec{E}$, es decir, $180 - 37 = 143°$ con respecto a $\vec{D}$ en el sentido contrario de las manecillas del reloj.

c) Vector $2\vec{D}\ \ \frac{3}{2}\vec{E}$.

Solución

Con la ayuda de la siguiente figura podemos obtener la suma de los vectores en *a*) y *b*).



De la ley de cosenos obtenemos la magnitud de $2\vec{D}-\frac{3}{2}\vec{E}$.

$$\left|2\vec{D}-\frac{3}{2}\vec{E}\right|^2=(3.06)^2+(3.42)^2-2(3.06)(3.42)\cos(37.0°)$$
$$\left|2\vec{D}-\frac{3}{2}\vec{E}\right|=2.08$$

La dirección (el ángulo α en la figura) se puede calcular con la ley de senos.

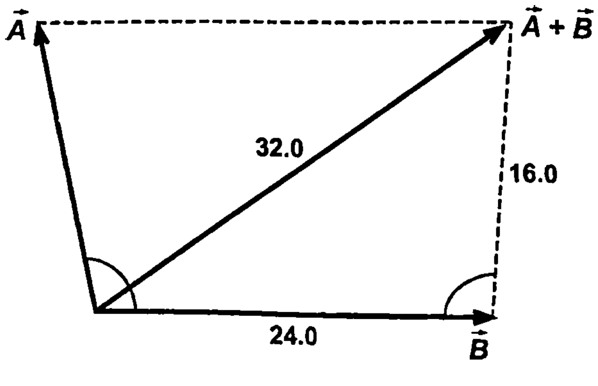
$$\text{sen}(\alpha)=\frac{3.06}{2.08}\text{sen}(37.0°)$$
$$\alpha=62.3°$$

2. **Suma de vectores**

a) Encontrar el ángulo entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de 16.0 y 24.0 unidades de magnitud respectivamente cuando el vector suma $\vec{A}+\vec{B}$ tiene una magnitud de 32.0 unidades.

Solución

La situación se representa con la siguiente figura



El ángulo se puede encontrar usando la ley de cosenos.

$$\cos\delta = \frac{(16.0)^2 + (24.0)^2 - (32.0)^2}{2(16.0)(24.0)}$$
$$\delta = 104°$$

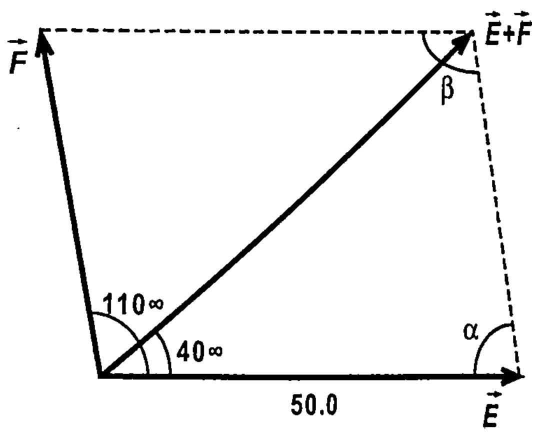
así que el ángulo entre los vectores es

$$\sigma = 180 - \delta = 76°$$

b) Dos vectores $\vec{E}$ y $\vec{F}$ forman un ángulo de 110°. $\vec{E}$ tiene magnitud de 50.0 unidades y hace un ángulo de 40.0° con el vector suma $\vec{E}+\vec{F}$. Encuentra las magnitudes de $\vec{F}$ y del vector suma $\vec{E}+\vec{F}$.

Solución

Usando la información dada podemos imaginar una situación como la mostrada en la siguiente figura



Donde podemos observar que el ángulo α es 180° - 110° = 70°.
Además, ya que la suma de α + β + 40° = 180°, podemos obtener β = 70°.

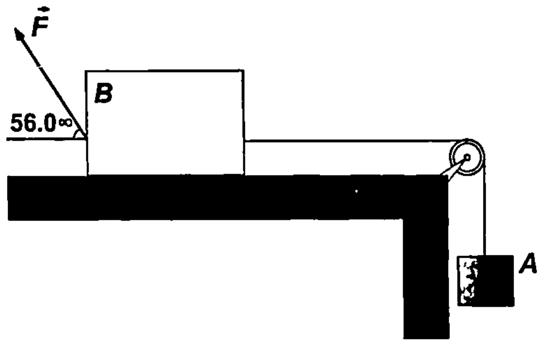
Observamos que α y β son iguales, entonces la magnitud de $\vec{E}+\vec{F}$ debe ser igual a la magnitud de $\vec{E}$.

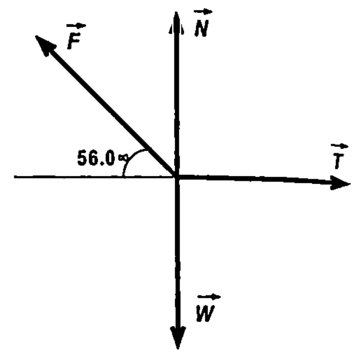
$$|\vec{E}+\vec{F}| = 50$$

De la ley de senos podemos obtener la magnitud de $\vec{F}$

$$F = E\frac{\text{sen}(40°)}{\text{sen}(70°)} = 34.2$$

3. Se tiene un bloque A suspendido por medio de una cuerda que pasa por una polea y conectada a un bloque B como se muestra en la parte izquierda de la siguiente figura





En la parte derecha de la figura se muestra un diagrama del bloque B con las fuerzas que se ejercen sobre él. Las fuerzas mostradas son:

- $\vec{F}$ es la fuerza aplicada y tiene magnitud $F = 12.5$ (N).
- $\vec{W}$ es el peso y tiene magnitud $W = 19.6$ (N).
- $\vec{T}$ es la tensión de la cuerda.
- $\vec{N}$ es la fuerza normal ejercida por la superficie sobre el bloque.

a) Calcula las componentes vertical y horizontal de $\vec{F}$ y $\vec{W}$.

Solución

Componente horizontal de $\vec{F}$

$$F\cos(56.0) = 6.99 \ \text{(N)}$$

Observa que la componente horizontal es hacia la izquierda.

Componente vertical de $\vec{F}$ (hacia arriba)

$$F\text{sen}(56.0) = 10.3 \ \text{(N)}$$

La componente horizontal de $\vec{W}$ es cero ya que la fuerza es vertical. Por lo tanto la componente vertical de $\vec{W}$ (hacia abajo) es de 19.6 (N).

b) Sabiendo que el bloque está en equilibrio, es decir $\vec{F}+\vec{W}+\vec{N}+\vec{T}=0$, calcula las magnitudes de $\vec{N}$ y $\vec{T}$.

Solución

Sabemos que $\vec{F}+\vec{W}+\vec{N}+\vec{T}=0$. Las componentes horizontales tienen que sumar cero (escogemos la dirección de la izquierda como negativa).

$$T - 6.99 = 0$$
$$T = 6.99 \ \text{(N)}$$

Las componentes verticales deben también sumar cero (escogemos la dirección hacia abajo como negativa)

$$N + 10.2 - 19.6 = 0$$
$$N = 9.40 \ \text{(N)}$$

4. La siguiente figura es un pentágono regular, es decir, una figura con 5 lados iguales.

a) ¿Cuál es el valor de cada uno de los ángulos interiores de esta figura?

Solución

Los ángulos son iguales. Observa que si dividimos el polígono en 3 triángulos como muestra la figura en *b*), la suma de los ángulos interiores de los tres triángulos (3 veces 180°) es la suma de los ángulos interiores del polígono. Ya que existen 5 ángulos en el polígono tenemos que cada uno es igual a $3 \cdot (180°)/5 = 108°$.

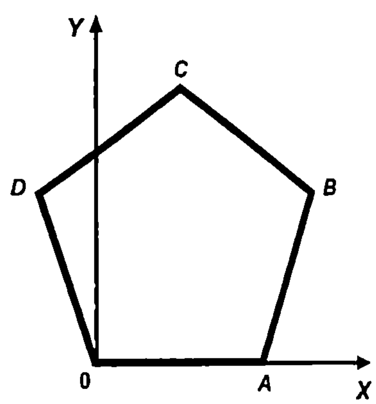
b) Dibuja los siguientes vectores:

i. $\vec{r}_{O-B}$, es el vector que va desde el punto *O* al punto *B*. En las siguientes preguntas se usará la misma notación.

ii. $\vec{r}_{O-B}$, el resultado de la operación $\vec{r}_{O-B} - \vec{r}_{O-C}$.

Solución

En la siguiente figura se muestran los vectores indicados.



c) Los lados del pentágono regular miden 10.0 [m]. Indica la magnitud y dirección de los siguientes vectores con respecto al eje de coordenadas indicado.

i. $\vec{r}_{O-B}$

Solución

La magnitud es fácil encontrarla por medio de la ley de cosenos.

$$\left|\vec{r}_{O-B}\right|^2 = (10.0)^2 + (10.0)^2 - 2(10.0)\,(10.0 = \cos(180°)$$

$$\left|\vec{r}_{O-B}\right|^2 = 16.2\ (\mathrm{m})$$

La dirección es indicada con el ángulo que hace $\vec{r}_{O-B}$ con el eje *x*. El triángulo que hace $\vec{r}_{O-B}$ con los lados O-A y O-B del polígono, es isósceles. Los ángulos iguales tienen que ser iguales a (180° – 108°)/2 = 36° por lo que la dirección de $\vec{r}_{O-B}$ es a 36° con respecto al eje *x*.

ii. $\vec{r}_{O-C}$

Solución

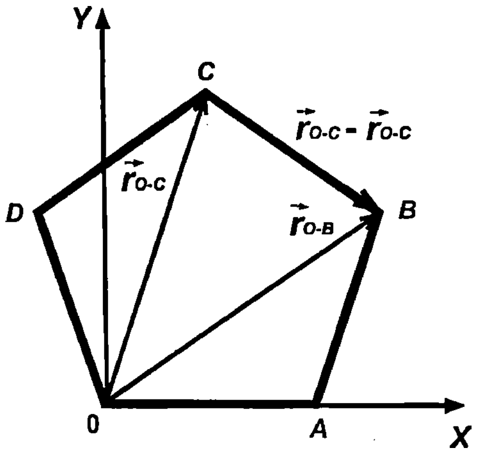
La magnitud de $\vec{r}_{O-C}$ es la misma que la de $\vec{r}_{O-B}$, igual a 16.2 (m).

La dirección es indicada con el ángulo que hace $\vec{r}_{O-C}$ con el eje x. El ángulo que hace $\vec{r}_{O-C}$ con el lado O-D es igual al que hace $\vec{r}_{O-B}$ con el eje x, 36°. Entonces el ángulo que hace $\vec{r}_{O-C}$ con el eje x es $108° - 36° = 72°$.

iii. $\vec{r}_{O-B} - \vec{r}_{O-C}$.

Solución

La magnitud de este vector es igual a la magnitud del lado, 10.0 (m). Para encontrar la dirección, observa la siguiente figura



Observa que el ángulo $\alpha = 72°$ (igual al ángulo que hace $\vec{r}_{O-C}$ con el eje x) y el ángulo $\delta = 180° - 36° = 72°$ (usando el hecho de que el ángulo entre C-D y C-B es 108°). Entonces el ángulo que hace $\vec{r}_{O-B} - \vec{r}_{O-C}$ con el eje x (por debajo) es $\beta = 180° - \alpha - \delta = 36°$.

5. Considera los siguientes dos vectores:

- $\vec{A}$ es un vector que tiene componente horizontal 6.0 (cm) y componente vertical 6.0 (cm).
- $\vec{B}$ es un vector que tiene componente horizontal −2.0 (cm) y componente vertical 8.0 (cm).

Dibuja sobre un mismo sistema de referencia:

a) Los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

b) El vector $\vec{A} + \vec{B}$.

c) El vector $\vec{A} - \vec{B}$.

Solución a *a*), *b*) y *c*)

Para hacer la figura nota que:

- La componente horizontal de la suma $\vec{A} + \vec{B}$ es $6.0 - 2.0 = 4.0$ (cm).
- La componente vertical de la suma $\vec{A} + \vec{B}$ es $6.0 + 8.0 = 14.0$ (cm).

- La componente horizontal de la resta $\vec{A}-\vec{B}$ es $6.0 + 2.0 = 8.0$ (cm).
- La componente vertical de la resta $\vec{A}-\vec{B}$ es $6.0 - 8.0 = -2.0$ (cm).

  Observa que en la siguiente figura cada unidad es de 2.0 (cm).

d) Encuentra el ángulo que hay entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y analíticamente. (Puedes comprobar tu resultado con un transportador).

Solución

El ángulo que hace $\vec{A}$ con la horizontal hacia la derecha es:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{6.0}{6.0}\right) = 45°$$

el ángulo que hace $\vec{B}$ con la horizontal hacia la izquierda es:

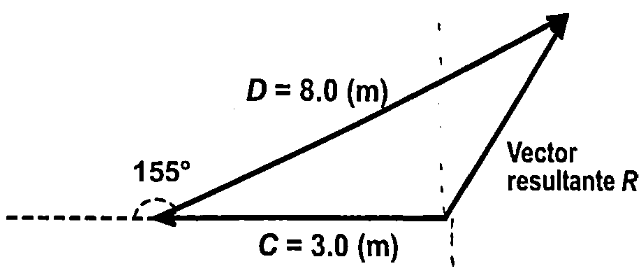
$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{8.0}{2.0}\right) = 76°$$

entonces, el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es $180° - \alpha - \beta = 59°$.

6. Se tienen dos vectores $\vec{C}$ y $\vec{D}$ que tienen magnitudes $C = 3.0$ y $D = 8.0$ unidades. Si el ángulo entre ellos es de 155°, calcula la magnitud y dirección con respecto al vector C de la suma $\vec{C}+\vec{D}$ y la resta $\vec{C}-\vec{D}$.

Solución

En la suma, primero calcularemos la magnitud del vector, esto usando la ley de cosenos, partiendo de una figura como la que sigue.



Con ayuda de esta figura planteamos la ley de cosenos con el cuidado de tomar el ángulo de dentro del triángulo que es 180°– 155° y esto nos queda:

$$R^2 = 3.0^2 + 8.0^2 - 2(8.0)(3.0)\cos(180° - 155°)$$

que sin necesidad de hacer ningún despeje, podemos encontrar la magnitud del vector, que es 5.4 (m) ahora con esta información podemos plantear otra ley de cosenos con la que podemos encontrar el ángulo que forma el vector suma con C.

Esta ley de cosenos es

$$8.0^2 = 3.0^2 + 5.4^2 - 2(3.0)\ (5.4)\cos(\theta)$$

de donde despejando

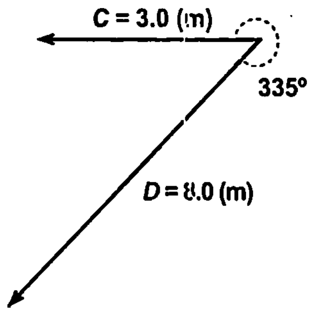
$$\cos(\theta) = \frac{3.0^2 + 5.4^2 - 8.0^2}{2(3.0)\ (5.4)} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left[\frac{3.0^2 + 5.4^2 - 8.0^2}{2(3.0)\ (5.4)}\right]$$

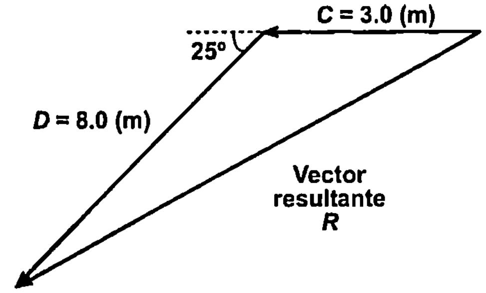
encontramos que $\theta = 143°$.

Así tenemos bien especificado el vector resultante que tiene una magnitud de 5.4 (m) y hace un ángulo de 143° con el vector $\vec{C}$.

Ahora queremos hacer la resta $\vec{C} - \vec{D}$, sabemos que esta operación es equivalente a hacer la suma del vector $\vec{C}$ con el vector $\vec{D}$ pero con la dirección contraria. Para hacer esto le sumamos 180° a los 155° que había originalmente entre estos dos vectores, esto nos queda un ángulo de 335°. Analizando el primer dibujo es fácil ver que también hay un ángulo de 25° entre los vectores, pero del otro lado, esto nos facilita el planteamiento de la suma en el segundo dibujo.

Ahora planteamos la ley de cosenos que queda:





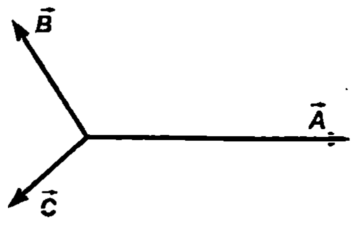
$$R^2 = 3.0^2 + 8.0^2 - 2(3.0)\ (8.0)\cos(180° - 25°)$$

que nos da 10.8 (m) para la magnitud y ahora sacamos el ángulo que hace con $\vec{C}$ usando otra ley de cosenos que nos queda:

$$8.0^2 = 3.0^2 + 10.8^2 - 2(3.0)\ (10.8)\cos(\theta)$$

que al despejar para el ángulo y resolver nos queda: $\theta = 18°$ y de nuevo tenemos especificado totalmente el vector resta.

7. Tres vectores se presentan a continuación.



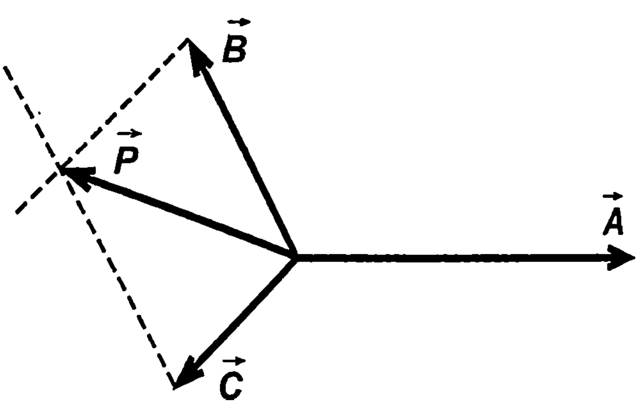
La magnitud de $\vec{A}$ es 40.0, la magnitud de $\vec{B}$ es 20.0 y la magnitud de $\vec{C}$ es 15.0. El ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es de 120° y el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{C}$ es de 150°. Encontraremos la suma de los tres vectores por dos métodos diferentes.

a) Usemos el método del paralelogramo. Para ello sigue los pasos a continuación construyendo claramente tus gráficas:

i. Construye un paralelogramo con $\vec{B}$ y $\vec{C}$. Usando la ley de cosenos calcula $\vec{P}=\vec{B}+\vec{C}$ encontrando su magnitud y el ángulo que hace con $\vec{A}$.

Solución

Como el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es de 120° y el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{C}$ es de 150° y sabemos que el ángulo en una vuelta completa es de 360° podemos decir que el ángulo entre $\vec{B}$ y $\vec{C}$ es de 90° por lo que para encontrar la magnitud de $\vec{P}$, podemos usar el teorema de Pitágoras como sigue: $P^2 = B^2 + C^2$ que sustituyendo los valores de *B* y de *C*, nos queda que *P*, la magnitud de $\vec{P}$ es 25.0. Ahora para saber el ángulo que hace con $\vec{A}$ primero calculamos el ángulo que hace con $\vec{B}$, visualicemos lo que estamos haciendo.

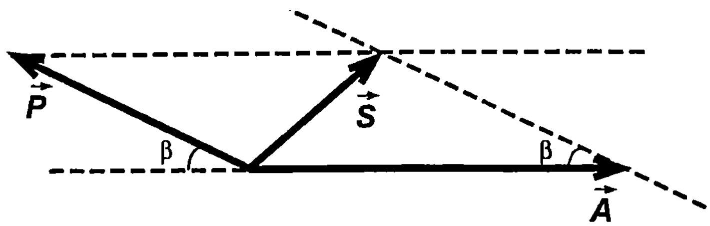


Para encontrar el ángulo de $\vec{P}$ con $\vec{B}$ usaremos identidades trigonométricas aunque podríamos usar la ley de cosenos. Sabemos que el seno de ese ángulo es igual a C/P por ser las magnitudes del cateto opuesto y la hipotenusa respectivamente. Así pues $\theta = \text{sen}^{-1}(C/P)$ que al sustituir encontramos que $\theta = 36.9°$ y para encontrar el ángulo de $\vec{P}$ con respecto a $\vec{A}$ sólo tenemos que sumarle los 120° que hay entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ así que finalmente $\vec{P}$ tiene una magnitud de 25.0 y un ángulo de 156.9° con respecto a $\vec{A}$.

ii. Construye un paralelogramo con $\vec{P}$ y $\vec{A}$. Usando la ley de cosenos calcula $\vec{S}=\vec{P}+\vec{A}$ definiendo su magnitud y el ángulo que hace con $\vec{A}$. Este vector es el vector suma de $\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$.

Solución

Como podemos ver en la figura, el ángulo de 156.9° con respecto a $\vec{A}$ se puede usar para calcular β que es el ángulo que necesitamos para la ley de cosenos. Entonces β = 180° – 156.9° = 23.1°.



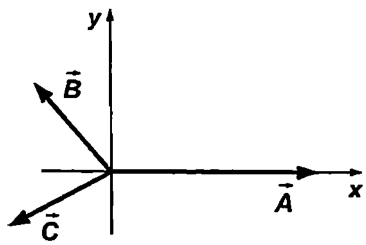
Planteamos una ley de cosenos para encontrar la magnitud del vector suma de los tres vectores que teníamos. Esta ecuación nos queda: $r^2 = 25^2 + 40^2 - 2 * 25 * 40 * \cos(23.1)$ de aquí resolvemos y nos queda que la magnitud del vector que estamos buscando es 19.6 (m). Ahora plantearemos otra ley de cosenos para encontrar el ángulo que hace nuestro vector con $\vec{A}$, esto es: $25^2 + 40^2 + 19.6^2 - 2 * 40 * 19.6 * \cos(\theta)$ de aquí despejamos para el ángulo y nos queda $\theta = 29.9°$ con este resultado ya tenemos totalmente especificada la suma de los tres vectores; un vector con magnitud de 19.6 (m) y que hace un ángulo de 29.9° con respecto a $\vec{A}$.

b) Usemos el método de componentes definiendo al eje *x* horizontal a la derecha y al eje *y* vertical hacia arriba colocando el origen en donde inician los tres vectores.

i. Calcula las componentes de cada vector.

Solución

Calcularemos las componentes de cada vector, para esto resulta muy útil analizar los ángulos que cada vector hace con cada eje. Veamos la figura original con ejes.



Sabemos que el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es de 120° por lo que para saber el ángulo de $\vec{B}$ con el eje *y* positivo, sólo hay que restarle 90° y podemos decir que el ángulo entre $\vec{B}$ y el eje *y* positivo es de 30°. Al vector $\vec{C}$ lo referiremos al eje *y* negativo y vemos que hace un ángulo de 150° – 90° que es 60°. Ahora, para ver las componentes de cada vector en cada eje, usaremos identidades trigonométricas y tendremos cuidado de la dirección de la componente; usaremos una tabla que nos queda como sigue:

	A	*B*	*C*
x	40	–20sen(30)	–15sen(60)
y	0	20cos(30)	–15cos(60)

Esta misma tabla ya con los valores que son justamente las proyecciones nos queda:

	A	B	C
x	40	−10	−13
y	0	17.3	−7.5

ii. Encuentra las componentes de la suma $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$.

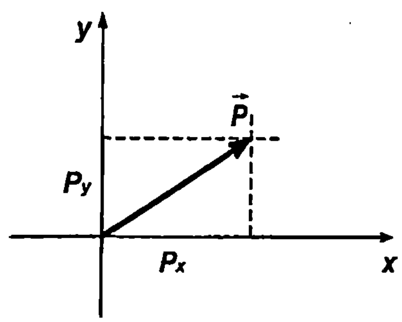
Solución

Para encontrar las componentes de la suma, sólo hacemos una suma de las componentes de cada vector en cada eje. La suma de componentes en el eje "x" nos queda: $S_x = 40 - 10 - 13$ que es 17.0 (m); ésta es la componente en "x" del vector que buscamos. En el eje "y" nos queda: $S_y = 0 + 17.3 - 7.5$ que da 9.8 (m), ésta es la componente en "y" del vector suma.

iii. Encuentra la magnitud de la suma y el ángulo que hace con el eje x.

Solución

Para encontrar la magnitud, usamos el teorema de Pitágoras, porque el eje "x" y el eje "y" son perpendiculares, es decir, forman un ángulo de 90°, esto nos queda $S^2 = 17^2 + 9.8^2$ que al desarrollar nos queda que la magnitud de nuestro vector suma es 19.6 (m) y ahora para sacar el ángulo usaremos identidades trigonométricas, sabemos que la tangente del ángulo que hace con el eje "x" es la magnitud del opuesto sobre la del adyacente, que puesto en ecuaciones es: $\tan(\theta) = 9.8/17$ y al resolver para el ángulo, nos quedan 30.0°.



c) Compara tus respuestas en *a*) y *b*).

Solución

Como podemos ver las respuestas en *a*) y en *b*) son prácticamente iguales.

11.2 Problemas propuestos

1. Tienes dos vectores de magnitudes 7.00 y 10.0 unidades.

a) Vamos a encontrar el ángulo que debe haber entre ellos para que la magnitud de la suma sea de 14.0 unidades con los siguientes pasos:

i. Si el ángulo entre ellos es de 90.0°, ¿cuál sería la magnitud de la suma? Construye una gráfica y calcula la magnitud de la suma de los vectores (para construir una gráfica, los

vectores pueden ir en cualquier dirección, sólo tienes que mantener el ángulo entre ellos de 90.0°).
Respuesta: (12.2 unidades).

ii. Si el ángulo entre los vectores es mayor a 90.0°, ¿es la magnitud de la suma *mayor* o *menor* que tu respuesta en (i)? Explica tu razonamiento con una gráfica.
Respuesta: (menor).

iii. De acuerdo a tu respuesta en el inciso anterior, ¿es el ángulo, para que la magnitud de la suma sea de 14.0 unidades, *mayor* o *menor* a 90.0°? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (mayor).

iv. De acuerdo a tu respuesta en (iii), construye una gráfica de la suma de los vectores. Observa que el ángulo que puedes calcular con la ley de cosenos se relaciona con el ángulo entre los vectores. Con esta información calcula el ángulo entre los vectores. Muestra tu procedimiento.
Respuesta: (70°).

b) Siguiendo el razonamiento del inciso *a*) encuentra el ángulo que debe haber entre los vectores para que la magnitud de la suma sea de 5.00 unidades.
Respuesta: (152.3°).

2. Tenemos dos vectores de la misma magnitud de 8.00 unidades.

a) ¿Cuál es el ángulo entre ellos para que la magnitud de la suma sea de 8.00 unidades? Explica tu respuesta con una gráfica de la suma de vectores.
Respuesta: (60°).

b) ¿Si el ángulo entre ellos es de 90°, es la magnitud de la suma *mayor* o *menor* que 8.00 unidades? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (mayor).

c) ¿Si el ángulo entre ellos es de 160°, es la magnitud de la suma *mayor* o *menor* a 8.00 unidades? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (menor).

d) Calcula la magnitud de la suma para cada caso de los incisos *b*) y *c*).
Respuesta: *b*) = 11.3, *c*) = 2.78 unidades.

3. Un auto se mueve de acuerdo a los siguientes desplazamientos:

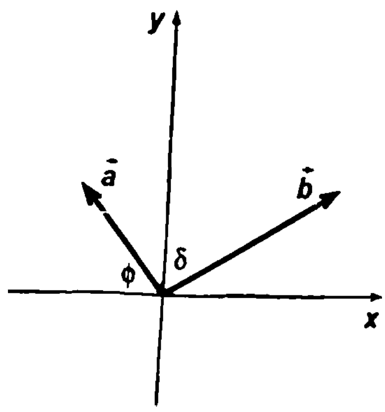
- Primer desplazamiento ($\vec{D}_1$): recorre 25.6 (km) en dirección de 45° del oeste hacia el norte.
- Segundo desplazamiento ($\vec{D}_2$): recorre 11.8 (km) en dirección de 45° del norte hacia el este.
- Tercer desplazamiento ($\vec{D}_3$): recorre 21.2 (km) en dirección este.

a) Construye una gráfica donde muestres los tres desplazamientos y el desplazamiento total ($\vec{D}_T = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3$).

b) Calcula la magnitud y la dirección del desplazamiento parcial $\vec{D}_{1+2} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2$ mostrando una gráfica de la suma.
Respuesta: (28.2 (km), 20.3° del N al O).

c) Calcula la magnitud y la dirección del desplazamiento total sumando el desplazamiento del inciso *b*) y el tercer desplazamiento, $\vec{D}_T = \vec{D}_{1+2} + \vec{D}_3$ mostrando una gráfica de la suma.
Respuesta: (28.2 (km), 23.4° del N al E).

4. Tenemos los dos vectores siguientes donde a = 12.5 unidades, b = 27.2 unidades, el ángulo ϕ que hace $\vec{a}$ con el eje x negativo es de 56.5° y el ángulo δ que hace $\vec{b}$ con el eje y positivo es de 62.1°.



a) Calcula las componentes de los vectores en x y en y.
Respuesta: $(a_x = -6.90, a_y = 10.4, b_x = 24.0, b_y = 12.7)$.

b) Calcula la magnitud y dirección del vector $\vec{s} = 2\vec{a} + \vec{b}$ usando el método de componentes. Construye una gráfica donde muestres el vector $\vec{s}$. Para indicar la dirección de $\vec{s}$ calcula el ángulo que hace $\vec{s}$ con el eje y positivo.
Respuesta: $(S_x = 10.2, S_y = 33.5, \alpha = 16.8°)$.

c) Calcula la magnitud y dirección del vector $\vec{p} = 5\vec{a} - 2\vec{b}$ usando el método de componentes. Construye una gráfica donde muestres el vector $\vec{p}$. Para indicar la dirección de $\vec{p}$ calcula el ángulo que hace $\vec{p}$ con el eje x negativo.
Respuesta: $(P_x = -82.5, P_y = 26.6, \alpha = 17.9°)$.

5. Un robot de una fábrica de autos sólo puede dar pasos de 5.00 (m) y 8.00 (m), pero necesita moverse 4.00 (m) para colocar una pieza; el robot puede moverse en cualquier dirección, así que con un movimiento de 8.00 (m) y otro de 5.00 (m) con un ángulo conveniente puede moverse los 4.00 (m) que necesita. Piensa en estos desplazamientos del robot como vectores. Vamos a encontrar el ángulo que debe haber entre ellos para que la magnitud de la suma sea de 4.00 (m) con los siguientes pasos:

a) Si el ángulo entre ellos es de 90.0°, ¿cuál sería la magnitud de la suma? Construye una gráfica y calcula la magnitud de la suma de los vectores (para construir una gráfica, los vectores pueden ir en cualquier dirección, sólo tienes que mantener el ángulo entre ellos de 90.0°).
Respuesta: (9.43 (m)).

b) Si el ángulo entre los vectores es menor a 90.0°, ¿es la magnitud de la suma *mayor* o *menor* que tu respuesta en *a*)? Explica tu razonamiento con una gráfica.
Respuesta: (mayor).

c) De acuerdo a tu respuesta en el inciso anterior, ¿es el ángulo, para que la magnitud de la suma sea de 4.00 (m), *mayor* o *menor* a 90.0°? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (mayor).

d) De acuerdo a tu respuesta en *c*), construye una gráfica de la suma de los vectores. Observa que el ángulo que puedes calcular con la ley de cosenos se relaciona con el ángulo entre los vectores. Con esta información calcula el ángulo entre los vectores. Muestra tu procedimiento.
Respuesta: (156°).

¿Podrías inventar una ecuación para programársela al robot, de modo que le digas el desplazamiento (entre el máximo y mínimo para esos dos desplazamientos) que tiene que hacer, y el robot haga esos dos desplazamientos y llegue donde quieres? Esta ecuación encuentra el ángulo en función de la distancia que quieres que recorra y las magnitudes de los dos desplazamientos que puede hacer. Construye la ecuación y muestra tu procedimiento.

6. Un submarino que seguía el curso de las tortugas marinas, recorre 20 (km) hacia el oeste y 50 (km) en una dirección de 30° del oeste hacia el sur. Ahí encuentra un punto de reunión de tortugas. El almirante del submarino quiere dar información del lugar y de cómo regresar. Para ello, calcula:

a) El vector desplazamiento total y la dirección.
Respuesta: (68 (km), 22° hacia el S desde el O).

b) El vector desplazamiento que tendría que recorrer para llegar al mismo punto de donde partió.
Respuesta: (68 (km), 22° hacia el N desde el E).

7. Explica por qué se usan vectores en Física.

8. Describe la diferencia entre desplazamiento y distancia.

9. Si te dan los valores $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$ y $\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$, cómo puedes encontrar $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

10. Dos vectores de magnitudes $A = 6.0$ y $B = 8.0$ unidades, forman un ángulo entre sí de 120°. Encontrar la magnitud de la diferencia $\vec{A}-\vec{B}$ y el ángulo con respecto a $\vec{A}$.

11. Tienes dos vectores de magnitudes 6.0 y 9.0 unidades. ¿Qué ángulo debe haber entre ellos para que la magnitud de la suma sea 12 unidades?

12. Tienes dos vectores de magnitudes 4.0 y 5.0 unidades. ¿Qué ángulo debe haber entre ellos para que la magnitud de la suma sea de 2.0 unidades?

13. El vector $\vec{A}$ tiene una magnitud $A = 10$; si sabes que este vector hace un ángulo α con el eje x y un ángulo 2α con el eje y, encuentra las componentes de $\vec{A}$.

14. Un auto corre 35 (km) hacia el este y 60 (km) en una dirección de 25° del este hacia el norte. Calcula el desplazamiento total.

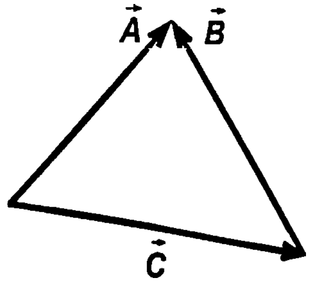
15. El vector resultante de dos vectores tiene 10 unidades y hace un ángulo de 35° con uno de los vectores que tiene como magnitud 12 unidades. Encontrar la magnitud del otro vector y el ángulo entre ellos.

16. Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ forman un ángulo de 120°. $\vec{B}$ tiene una magnitud de 10.0 unidades y hace un ángulo de 140° con el vector $\vec{A}-\vec{B}$. Encuentra la magnitud del vector $\vec{A}$.

17. Encuentra el ángulo entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de 18.0 y 15.0 unidades de magnitud respectivamente cuando el vector $\vec{A} - \vec{B}$ tiene una magnitud de 10.0 unidades.

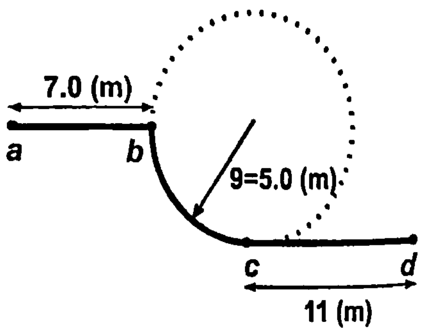
18. Encuentra el ángulo entre dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ de 18.0 y 15.0 unidades de magnitud respectivamente cuando el vector $\vec{A}+\vec{B}$ tiene una magnitud de 10.0 unidades.

19. Considera que los lados de un triángulo pueden representarse por vectores, como se muestra en la figura siguiente:



Demuestra que el lado A (magnitud de $\vec{A}$) no puede ser mayor a la suma $C + B$ (la suma de las magnitudes). Esta es la desigualdad del triángulo.

20. De la siguiente figura

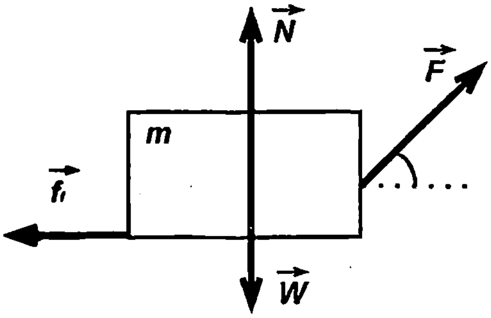


Calcula la magnitud y dirección de :

a) El vector desplazamiento de *a* a *b*.
b) El vector desplazamiento de *b* a *c*.
c) El vector desplazamiento de *c* a *d*.
d) El vector desplazamiento de *a* a *d*.

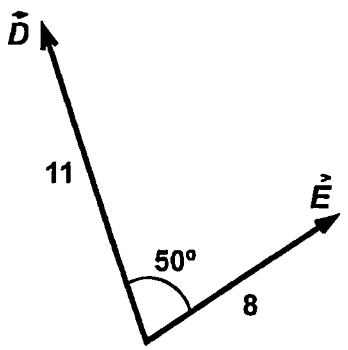
21. Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ forman un ángulo de $\alpha = 35°$ donde $A = 2.5$ y $B = 4.7$. Si $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$ y $\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$, encuentra las magnitudes de $\vec{C}$ y $\vec{D}$ con el vector $\vec{A}$.

22. El diagrama de cuerpo libre de un objeto de masa m está representado en la siguiente figura



Donde la fuerza es $F = 45$ (N), el ángulo es $\theta = 25°$, el peso $W = 85$ (N). Si la fuerza total sobre el objeto es cero, calcula el valor de la fuerza de fricción f_f y el de la normal N.

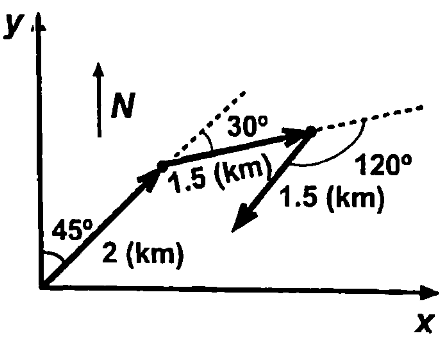
23. A partir de la siguiente figura



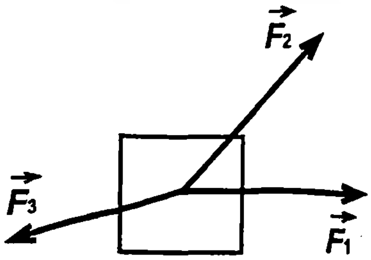
Calcula, de manera gráfica, el vector:

a) $\vec{D} - \vec{E}$
b) $\vec{E} - \vec{D}$
c) $\vec{D} - \vec{E}$

24. En una competencia de yates los botes rodean tres boyas como se muestra en la siguiente figura. ¿Cuál es el desplazamiento desde el inicio hasta la última boya?



25. Las fuerzas también son vectores. Calcula la fuerza total resultante sobre el cuerpo de la siguiente figura donde el ángulo entre $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ es 45° y entre $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_3$ es de 160° además $\vec{F}_1 = 5.2(\mathrm{N})$, $\vec{F}_2 = 6.3(\mathrm{N})$ y $\vec{F}_3 = 5.0(\mathrm{N})$.



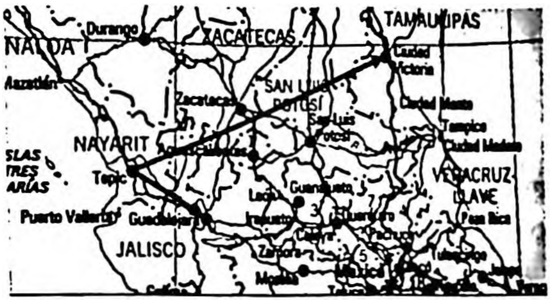
26. De las fuerzas de la figura anterior, calcula:

a) $2\vec{F}_1 - 3\vec{F}_2 + \vec{F}_3$
b) $-\vec{F}_1 - 2\vec{F}_3$

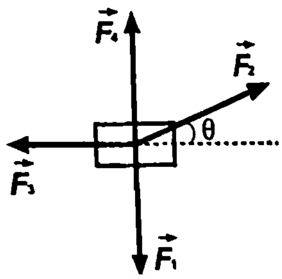
27. En la siguiente gráfica, llama $\vec{A}$ al vector desplazamiento de Tepic a Guadalajara, $\vec{B}$ al vector desplazamiento de Tepic a Victoria. Encuentra una operación de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ para encontrar un vector desplazamiento de Tepic a Querétaro. Si llamas al vector buscado $\vec{C}$, entonces tienes que encontrar una operación del tipo

$$\vec{C} = m\vec{A} + n\vec{B}$$

donde *m*, *n* son constantes.



28. Se ejercen sobre un bloque 4 fuerzas como se muestra en la figura.



Donde $\vec{F}_1 = 30(\mathrm{N})$, $\vec{F}_2 = 50(\mathrm{N})$, $\vec{F}_3 = 30(\mathrm{N})$, $\vec{F}_4 = 45(\mathrm{N})$ y $\theta = 32°$.

a) Calcula las componentes de cada fuerza.
b) Calcula la magnitud y dirección de la fuerza total sobre el objeto.

12 PROBLEMAS DE Vectores unitarios

12.1 Problemas resueltos

1. Un vector $\vec{A}$ de 8.00 unidades tiene una dirección que hace un ángulo de 35.0° con el eje $+x$, 67.0° con el eje $+y$ y 25° con el eje $+z$. Un vector $\vec{B}$ de 12.0 unidades hace un ángulo de 46.0° con el eje $+z$. La proyección sobre el plano x-y hace un ángulo de 32.0° con el eje $+x$. Calcula las componentes de los vectores.

Solución

La magnitud de $\vec{A}$ es $A = 8.00$. Además llamamos α al ángulo entre el vector y el eje $+x$, β al ángulo entre el vector y el eje $+y$ y θ entre el vector y el eje $+z$. Tenemos que

$$A_x = A\cos\alpha = 8.00\cos 35.0° = 6.55$$
$$A_y = A\cos\beta = 8.00\cos 67.0° = 3.13$$
$$A_z = A\cos\theta = 8.00\cos 25.0° = 7.25$$

Entonces, el vector se representa como $\vec{A} = 6.55\hat{i} + 3.13\hat{j} + 7.25\hat{k}$. La magnitud de $\vec{B}$ es $B = 12.0$ y los ángulos son $\theta = 46.0°$ y $\varphi = 32.0°$.

La componente B_z y B_{xy} están dadas por

$$B_z = B\cos\theta = 12.0\cos 46.0° = 8.34$$
$$B_{xy} = B\operatorname{sen}\theta = 12.0\operatorname{sen}46.0° = 8.63$$

Ahora de B_{xy} y φ podemos calcular las componentes en x y y.

$$B_x = B_{xy}\cos\varphi = 8.63\cos 32.0° = 7.32$$
$$B_y = B_{xy}\operatorname{sen}\varphi = 8.63\operatorname{sen}32.0° = 4.57$$

Así que podemos expresar nuestro vector como

$$\vec{B} = 7.32\hat{i} + 4.57\hat{j} + 8.34\hat{k}$$

2. Dados los siguientes vectores

$$\vec{A} = 2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$
$$\vec{B} = \hat{i} + 8\hat{j} - 4\hat{k}$$
$$\vec{C} = 12\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$$

calcula:

a) $\vec{A} + \vec{B}$
Solución

$$\vec{A} + \vec{B} = (2\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}) + (\hat{i} + 8\hat{j} - 4\hat{k}) = (2+1)\hat{i} + (-2+8)\hat{j} + (1-4)\hat{k} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$$

b) Vector unitario en dirección $\vec{A} + \vec{B}$.
Solución

Tenemos el vector $\vec{A} + \vec{B} = 3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}$, entonces solamente calculamos el vector unitario en esta dirección.

$$\hat{u}_{A+B} = \frac{\vec{A} + \vec{B}}{|\vec{A} + \vec{B}|} = \frac{3\hat{i} + 6\hat{j} - 3\hat{k}}{\sqrt{9+36+9}} = \frac{3}{\sqrt{54}}\hat{i} + \frac{6}{\sqrt{54}}\hat{j} - \frac{3}{\sqrt{54}}\hat{k}$$

c) $|\vec{C} - \vec{B}|$
Solución

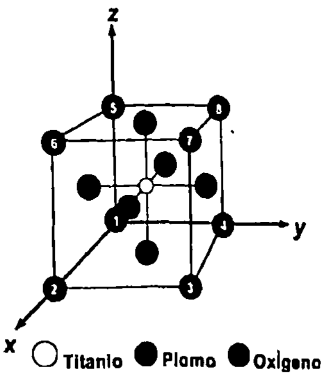
$$\vec{C} - \vec{B} = (12-1)\hat{i} + (-4-8)\hat{j} + (-3+4)\hat{k} = 11\hat{i} - 12\hat{j} + \hat{k}$$

$$|\vec{C} - \vec{B}| = \sqrt{(11)^2 + (-12)^2 + (1)^2} = \sqrt{121+144+1} = 16.3$$

d) $\vec{B} - \vec{C} + \vec{A}$
Solución

$$\vec{B} - \vec{C} + \vec{A} = (1-12+2)\hat{i} + (8+4+2)\hat{j} + (-4+3+1)\hat{k} = -9\hat{i} + 10\hat{j}$$

3. La figura siguiente representa la celda unitaria de un compuesto cerámico llamado Titanato de Plomo ($PbTiO_3$).



Esta estructura es de forma cúbica con lado a y consiste en:

- 1 átomo de Titanio en el centro del cubo.
- 8 átomos de Plomo en las esquinas del cubo.
- 6 átomos de Oxígeno en el centro de cada cara del cubo.

a) Calcula (en función de los vectores unitarios $\hat{i},\hat{j}$ y $\hat{k}$, el vector de posición del Titanio

Solución

$$\bar{r}_{Ti}=\frac{a}{2}\hat{i}+\frac{a}{2}\hat{j}+\frac{a}{2}+\hat{k}$$

b) Calcula el vector posición de cada Plomo.

Solución

$$\begin{aligned}
\bar{r}_{Pb,1}&=0\\
\bar{r}_{Pb,2}&=a\hat{i}\\
\bar{r}_{Pb,3}&=a\hat{i}+a\hat{j}\\
\bar{r}_{Pb,4}&=a\hat{j}\\
\bar{r}_{Pb,5}&=a\hat{k}\\
\bar{r}_{Pb,6}&=a\hat{i}+a\hat{k}\\
\bar{r}_{Pb,7}&=a\hat{i}+a\hat{j}+a\hat{k}\\
\bar{r}_{Pb,8}&=a\hat{j}+a\hat{k}
\end{aligned}$$

c) Calcula el vector posición de cada Oxígeno.

Solución

$$\begin{aligned}
\bar{r}_{O,1}&=\frac{a}{2}\hat{i}+\frac{a}{2}\hat{j}\\
\bar{r}_{O,2}&=\frac{a}{2}\hat{i}+\frac{a}{2}\hat{k}\\
\bar{r}_{O,3}&=a\hat{i}+\frac{a}{2}\hat{j}+\frac{a}{2}\hat{k}\\
\bar{r}_{O,4}&=\frac{a}{2}\hat{i}+a\hat{j}+\frac{a}{2}\hat{k}\\
\bar{r}_{O,5}&=\frac{a}{2}\hat{j}+\frac{a}{2}\hat{k}\\
\bar{r}_{O,6}&=\frac{a}{2}\hat{i}+\frac{a}{2}\hat{j}+a\hat{k}
\end{aligned}$$

4. De la celda unitaria del Titanato de Plomo presentada en el problema anterior, calcula:

a) Los ángulos θ y ϕ de los siguientes átomos:

- El Titanio

Solución

$$\vec{r}_{Ti} = \frac{a}{2}\hat{i} + \frac{a}{2}\hat{j} + \frac{a}{2}\hat{k}$$

$$r_{Tiz} = r_{Ti}\cos\theta$$

donde

$$r_{Ti} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{a/2}{\sqrt{3}a/2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 55°$$

Para ϕ observamos que $r_{Tix} = a/2$ y $r_{Tiy} = a/2$ son ambas positivas así que $\phi < 90°$, entonces

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{r_{Tiy}}{r_{Tiy}}\right) = \tan^{-1}(1) = 45°$$

- El Plomo 7.

Solución

$$\vec{r}_{Pb,7} = a\hat{i} + a\hat{j} + a\hat{k}$$

Observamos que este vector tiene la misma dirección que el vector de posición del titanio (su magnitud es mayor) así que

$$\theta = 55°$$
$$\phi = 45°$$

- El Oxígeno 3:

Solución

$$\vec{r}_{O,3} = a\hat{i} + \frac{a}{2}\hat{j} + \frac{a}{2}\hat{k}$$

Magnitud del vector y su componente en z

$$r_{O,3} = \sqrt{(a)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

$$r_{O,3} = \frac{a}{2}$$

entonces

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{r_{0,3z}}{r_{0,3}}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\right)=66^{\circ}$$

Para ϕ : $r_{0,3x}=a\,,r_{0,3x}=a/2$, entonces

5. Considera un vector $\vec{A}$ que mide 3.00 unidades y hace un ángulo de 29.0° con el eje z, además su proyección en el plano x-y hace un ángulo de 222° con respecto al eje x positivo (recuerda que este ángulo se toma en dirección contraria a las manecillas del reloj). Por otro lado, el vector $\vec{B}$ mide 7.00 unidades y hace un ángulo de 124° con respecto al eje x, 68.0° con respecto al eje y y 138° con respecto al eje z.

a) Calcula $\vec{C}=\frac{2}{3}\vec{A}+\frac{1}{2}\vec{B}$. Expresa tu respuesta en función de los vectores unitarios $\hat{i},\hat{j}$ y $\hat{k}$.

Solución

Lo primero que haremos será expresar estos dos vectores en función de los vectores unitarios $\hat{i},\hat{j}$ y $\hat{k}$. Primero, para $\vec{A}$ tenemos que su componente en x es $A_x=A\operatorname{sen}(\theta)\cos(\varphi)$ sabemos que estos ángulos son 29.0° y 222° respectivamente, sustituyendo $A_x=3.00\operatorname{sen}(29.0^{\circ})\cos(222^{\circ})$ que nos queda −1.08 unidades, ahora para la componente en y tenemos $A_y=A\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\varphi)$ que al sustituir y resolver nos queda −0.973 unidades y para la componente en el eje z tenemos $A_z=A\cos(\theta)$ de donde al sustituir y resolver nos quedan 2.62 unidades, así que podemos expresarlo como sigue:

$$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}+A_z\hat{k}=-1.08\hat{i}-0.973\hat{j}+2.62\hat{k}$$

También expresaremos al vector $\vec{B}$ de la misma forma pero usando las relaciones correspondientes de los ángulos α, β, y θ. Para el eje x tenemos $B_x=B\cos(\alpha)$, sabiendo que α es 124° podemos decir que nos queda $B_x=-3.91$ unidades, también debemos aclarar que en los otros dos ángulos β = 68° y θ = 138°. Ahora, para la componente en el eje y tenemos $B_y=B\cos(\beta)$ que nos da 2.62 unidades y en el eje z tenemos $B_z=B\cos(\theta)$ que nos queda −5.20 unidades. Ahora expresamos el vector $\vec{B}$ en la forma conveniente: $\vec{B}=-3.91\hat{i}+2.62\hat{j}-5.20\hat{k}$.

Ya que tenemos estos dos vectores en esta forma, es más fácil realizar la operación

$$\vec{C}=\frac{2}{3}\vec{A}+\frac{1}{2}\vec{B},$$

primero sustituimos los vectores ya en la nueva expresión:

$$\vec{C}=\frac{2}{3}\left(-1.08\hat{i}-0.973\hat{j}+2.62\hat{k}\right)+\frac{1}{2}\left(-3.91\hat{i}+2.62\hat{j}-5.20\hat{k}\right),$$

ahora hacemos la multiplicación por escalar:

$$\vec{C}=\left(-0.720\hat{i}-0.649\hat{j}+1.74\hat{k}\right)+\left(-1.96\hat{i}+1.31\hat{j}-2.60\hat{k}\right)$$

y finalmente hacemos la suma vectorialmente, lo que nos queda: $\vec{C}=-2.68\hat{i}+0.661\hat{j}-0.860\hat{k}$.

b) Calcula la magnitud del vector $\vec{C}$.

Solución

La magnitud del vector $\vec{C}$ la calculamos como sigue: $|\vec{C}|=C=\sqrt{(-2.68)^2+(0.661)^2+(-0.860)^2}$.

Que nos da que la magnitud de $\vec{C}$ es de 2.89 unidades.

c) Encuentra un vector unitario en dirección de $\vec{C}$. Expresa tu respuesta en función de los vectores unitarios $\hat{i}, \hat{j}$ y $\hat{k}$.

Solución

Para encontrar el vector unitario en dirección de $\vec{C}$ dividimos la expresión vectorial de C entre su magnitud y nos queda: $\hat{u}_C=\frac{\vec{C}}{C}=-0.927\hat{i}+0.229\hat{j}-0.298\hat{k}$.

d) Encuentra un vector $\vec{D}$ que tenga magnitud 5.50 y que tenga dirección opuesta a $\vec{C}$. Expresa tu respuesta en función de los vectores unitarios $\hat{i}, \hat{j}$ y $\hat{k}$.

Solución

Si queremos encontrar un vector $\vec{D}$ que tenga magnitud 5.50 y que tenga dirección opuesta a $\vec{C}$ sólo tenemos que cambiar el signo del vector unitario en dirección de $\vec{C}$ para que tenga dirección opuesta y lo multiplicamos por 5.50 para que tenga dicha magnitud. Esto nos queda: $\hat{u}_D=-\hat{u}_C=0.927\hat{i}-0.229\hat{j}+0.298\hat{k}$ entonces $\vec{D}=5.50\hat{u}_D=5.10\hat{i}-1.26\hat{j}+1.64\hat{k}$.

e) Encuentra los ángulos α, β, y θ que forma $\vec{C}$ con respecto a cada uno de los ejes y el ángulo φ que hace la proyección de $\vec{C}$ en el plano *x-y* con el eje *x* positivo.

Solución

Para encontrar estos ángulos usamos las mismas ecuaciones que usamos para cambiar la expresión de los vectores originales, pero ahora las usamos para encontrar estos ángulos.

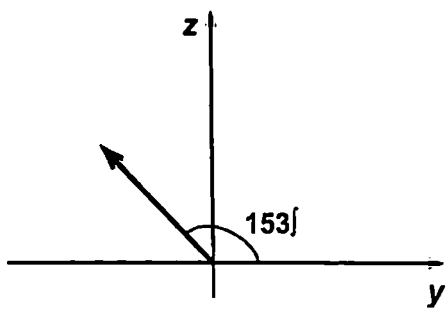
Para los ángulos α, β, y θ hacemos: $\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{C_x}{C}\right)$ de donde podemos ver que el argumento del coseno inverso es la componente del vector unitario en dirección del vector $\vec{C}$, lo cual simplifica las operaciones. Resolviendo encontramos que α = 158° y haciendo las mismas operaciones pero con las componentes correspondientes encontramos que β = 76.8° y que θ = 72.7°. Para encontrar el ángulo φ usamos la relación $C_x=C\operatorname{sen}(\theta)\cos(\varphi)$ donde despejando nos queda:

$\varphi=\cos^{-1}\left(\frac{C_x}{C\operatorname{sen}(\theta)}\right)$ que al sustituir finalmente encontramos que φ = 166°.

6. Se sabe que un vector mide 9.00 unidades y hace un ángulo de 48.0° con respecto al eje *x* positivo y su proyección sobre el plano *y-z* hace un ángulo de 153° con respecto al eje *y* positivo como muestra la figura de abajo (la flecha representa la proyección del vector en el plano *y-z*).

a) Encuentra las componentes *x*, *y* y *z* de este vector.
Solución

Podemos ver que la información que nos dan es la magnitud, el ángulo α y otro ángulo que no hemos nombrado pero se especifica qué ángulo es. Primero sacamos la componente en el eje *x* como sigue $V_x = V\cos(\alpha)$ que nos da como resultado: 6.02 unidades. Ahora queremos saber la magnitud de la proyección de $\bar{V}$ en el plano *y-z* y para esto pensemos en que cualquier vector en dirección *x* es perpendicular al plano *y-z*, es decir, tienen 90° entre ellos y si hay un vector que hace $\alpha°$ con respecto a *x*, tiene un ángulo de 90°– $\alpha°$ con respecto al plano *y-z* así que para saber la magnitud de la proyección de $\bar{V}$ en el plano *y-z*, sólo seguimos la relación de los cosenos pero para el ángulo de 90°– $\alpha°$ lo que nos queda: $V_{yz} = V\cos(90-\alpha)$ al resolver la ecuación podemos decir que V_{yz} = 6.69 unidades. Apoyémonos en la figura, sabiendo que la magnitud que sacamos es la magnitud del vector que se señala.



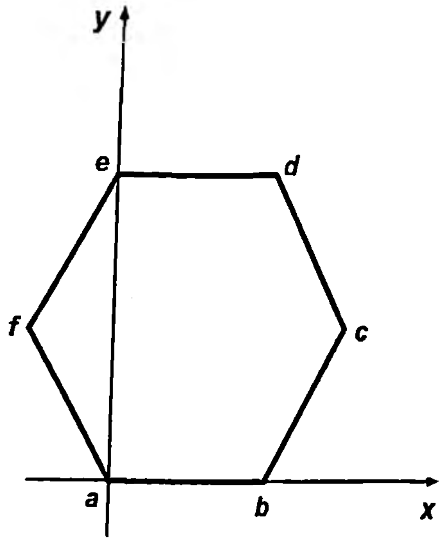
Ahora es fácil saber que el ángulo de este vector con respecto al eje *y* negativo es de 27°, y con respecto al *z* positivo es 63°. Ahora sacaremos las proyecciones de este vector con estos ejes. Para *y* podemos plantear la ecuación como $V_y = -V_{yz}\cos(27°)$; es importante ver que el signo negativo surge de que es el ángulo con respecto al eje *y* negativo, en definitiva esto nos da una proyección de –5.96 unidades. Para *z* tenemos $V_z = V_{yz}\cos(63°)$ que da una proyección de 3.04 unidades. Ahora podemos expresar el vector como $\bar{V} = 6.02\hat{i} - 5.96\hat{j} + 3.04\hat{k}$.

b) Encuentra los ángulos α, β, y θ (ángulos que hace el vector con los ejes *x*, *y* y *z*).
Solución

Para los ángulos sólo tenemos que usar las relaciones con los cosenos como hemos venido haciendo, aunque para el ángulo con respecto a *x* ya no es necesario porque se nos dio como dato α = 48°. Es importante ver que los ángulos que usamos en el inciso anterior para los ejes *y* y *z*, son de la proyección con respecto al eje que es diferente al ángulo del vector con respecto al eje. Para el eje *y* tenemos $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{-5.96}{9}\right)$ que resulta en β = 131°; para el eje *z* planteamos $\theta = \cos^{-1}\left(\frac{3.04}{9}\right)$ que nos da θ = 70.3° y tenemos todos los ángulos que buscábamos.

12.2 Problemas propuestos

1. En la siguiente figura se muestra un hexágono regular de lado 10.0 (cm) donde los puntos *a, b, c, d, e* y *f* representan los vértices del hexágono. En un hexágono regular los ángulos entre dos lados adyacentes son de 120°.



a) Representa los vectores posición de cada vértice en función de los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$.
Respuesta:

$$\left(\bar{a} = 0, \bar{b} = 10.0\hat{i}, \bar{c} = 15.0\hat{i} + 8.66\hat{j}, \bar{d} = 10.0\hat{i} + 17.3\hat{j}, \bar{e} = 17.3\hat{j}, \bar{f} = -5.00\hat{i} + 8.66\hat{j}\right)$$

b) Calcula los siguientes vectores desplazamiento y dibuja cada uno de ellos en la figura.

i. El vector desplazamiento del punto *e* al punto *c*, $\Delta\bar{r}_{e\to c}$.
Respuesta: $\left(\Delta\bar{r}_{e\to c} = 15.0\hat{i} - 8.64\hat{j}\right)$.

ii. El vector desplazamiento del punto β al punto *e*, $\Delta\bar{r}_{b\to e}$.
Respuesta: $\left(\Delta\bar{r}_{b\to e} - 10.0\hat{i} + 17.3\hat{j}\right)$.

iii. El vector desplazamiento del punto *f* al punto *c*, $\Delta\bar{r}_{f\to c}$.
Respuesta: $\left(\Delta\bar{r}_{f\to c} = 10.0\hat{i}\right)$.

2. Tenemos al vector $\bar{P} = -2.54\hat{i} - 4.36\hat{j} + 6.28\hat{k}$. Responde:

a) ¿Cuáles son las componentes P_x, P_y, y P_z, del vector $\bar{P}$?
Respuesta: $\left(P_x = -2.54, P_y = -4.36, P_z = 6.28\right)$.

b) ¿Es el ángulo que hace $\bar{P}$ con el eje *x* positivo *mayor, igual* o *menor* que 90°? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (mayor).

c) ¿Es el ángulo que hace $\vec{P}$ con el eje *y* positivo *mayor, igual* o *menor* que 90°? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (mayor).

d) ¿Es el ángulo que hace $\vec{P}$ con el eje *z* positivo *mayor, igual* o *menor* que 90°? Explica tu razonamiento.
Respuesta: (menor).

e) Calcula los ángulos α, β, y θ que hace $\vec{P}$ con los ejes *x*, *y* y *z*. Muestra tu procedimiento.
Respuesta: $(\alpha = 108°, \beta = 123°, \theta = 39°)$.

f) ¿Cuál es la proyección del vector $\vec{P}$ en el plano *x-y*? Calcula esta proyección ($\vec{P}_{xy}$) en forma vectorial en función de los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$.
Respuesta: $(\vec{P}_{xy} = -2.54\hat{i} - 4.36\hat{j})$.

g) Construye una gráfica de la proyección encontrada en *f*) en un plano cartesiano *x-y*.

h) Calcula el ángulo ϕ que hace la proyección $\vec{P}_{xy}$ con el eje *x*. (Recuerda que ϕ se mide desde el eje *x* positivo hasta el vector en el sentido contrario al de las manecillas del reloj.) Muestra tu procedimiento.
Respuesta: $(\phi = 240°)$.

3. Tenemos los siguientes vectores

$$\vec{A} = 3.0\hat{i} - 4.5\hat{j} + 8.5\hat{k}$$
$$\vec{B} = 4.0\hat{i} - 3.5\hat{j} + 2.1\hat{k}$$
$$\vec{C} = -3.0\hat{i} + 6.5\hat{j} - 3.0\hat{k}$$

Calcula:

a) El vector $\vec{Q} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$. Muestra tu procedimiento.
Respuesta: $(\vec{Q} = 4.0\hat{i} - 1.5\hat{j} + 7.6\hat{k})$.

b) El vector $\vec{R} = \frac{1}{2}\vec{A} - \frac{3}{2}\vec{B} + \frac{2}{3}\vec{C}$. Muestra tu procedimiento.
Respuesta: $(\vec{R} = -6.5\hat{i} + 7.3\hat{j} - 0.9\hat{k})$.

c) Un vector unitario en dirección $\vec{A}$. Muestra tu procedimiento.
Respuesta: $(\hat{u}_A = 0.30\hat{i} - 0.45\hat{j} + 0.85\hat{k})$.

d) Un vector unitario en dirección $\vec{Q}$. Muestra tu procedimiento.
Respuesta: $(\hat{u}_A = 0.30\hat{i} - 0.45\hat{j} + 0.85\hat{k})$.

e) Los ángulos α, β, y θ del vector $\vec{Q}$. Muestra tu procedimiento.

Respuesta: $(\alpha = 63°, \beta = 100°, \theta = 29°)$.

4. Una partícula se mueve en un plano. La siguiente tabla representa la posición de la partícula en ciertos instantes.

t (s)	*x(t)* (m)	*y(t)* (m)
0	3.0	2.0
1.0	4.0	3.0
2.0	5.0	5.0
3.0	6.0	8.0

a) Calcula el vector posición ($\vec{r}(t) = x\hat{i} + y\hat{j}$) en cada tiempo, $\vec{r}(0)$, $\vec{r}(1.0)$, $\vec{r}(2.0)$, $\vec{r}(3.0)$.

b) Calcula el desplazamiento mostrando tu procedimiento en los siguientes intervalos:

i. De $t = 0$ a $t = 1.0$ (s). *Respuesta:* $\left(\Delta\vec{r}_{0\to1} = 1.0\hat{i} + 1.0\hat{j}\ (\text{m})\right)$.

ii. De $t = 1.0$ a $t = 2.0$ (s). *Respuesta:* $\left(\Delta\vec{r}_{1\to2} = 1.0\hat{i} + 2.0\hat{j}\ (\text{m})\right)$.

iii. De $t = 2.0$ a $t = 3.0$ (s). *Respuesta:* $\left(\Delta\vec{r}_{2\to3} = 1.0\hat{i} + 3.0\hat{j}\ (\text{m})\right)$.

c) Calcula la velocidad media en cada intervalo del inciso *b*) donde la velocidad media se define como el vector desplazamiento entre el intervalo de tiempo, $\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$. Muestra tu procedimiento.

Respuesta: $\left(\vec{v}_{m0\to1} = 1.0\hat{i} + 1.0\hat{j}, \vec{v}_{m1\to2} = 1.0\hat{i} + 2.0\hat{j}, \vec{v}_{m2\to3} = 1.0\hat{i} + 3.0\hat{j}\ (\text{m/s})\right)$.

d) Compara las velocidades medias en los intervalos. Observa que una componente de la velocidad media se mantiene constante en cada intervalo y la otra componente cambia. ¿Está la magnitud de la velocidad de la partícula *aumentando* o *disminuyendo*? Explica tu razonamiento.

Respuesta: (aumenta).

5. Considera el siguiente vector: $\vec{V} = -3.00\hat{i} + 5.00\hat{j} - 6.00\hat{k}$ y contesta las siguientes preguntas:

a) Sin realizar cálculos, completa la siguiente tabla con una cruz × para el rango donde se encuentren los ángulos: α (ángulo que hace el vector con el eje *x*), β (ángulo que hace el vector con el eje *y*), y θ (ángulo que hace el vector con el eje *z*). Incluye una breve explicación de por qué elegiste esas respuestas. **Nota:** dibujar el vector puede serte útil.

	Entre 0° y 90°	*Entre 0° y 180°*	*Breve explicación*
α			
β			
θ			

b) Realiza operaciones para encontrar el valor numérico de estos ángulos. ¿Acertaste en la tabla? ¿Puedes dar una receta general para saber el rango en el que están los ángulos?
Respuesta: $(\alpha = 111^\circ, \beta = 53.3^\circ, \theta = 135^\circ)$.

c) Para el vector $\vec{V}$, encuentra el ángulo φ que hace la proyección de este vector sobre el plano *x-y* con el eje *x*.
Respuesta: (120°).

d) Considera el vector: $\vec{W} = -3.00\hat{i} + 5.00\hat{j}$. Encuentra los ángulos α, β, y θ de este vector.
Respuesta: $(\alpha = 121^\circ, \beta = 31^\circ, \theta = 90^\circ)$.

Explica por qué el ángulo encontrado en el inciso *c*) corresponde exactamente al ángulo que hace el vector $\vec{W}$ con el eje *x* en el inciso *d*). ¿Cuál es la relación entre $\vec{V}$ y $\vec{W}$?

6. Se tienen dos vectores que se expresan de la siguiente forma: $\vec{P} = 1.00\hat{i} + 3.00\hat{j} - 2.00\hat{k}$ y $\vec{Q} = 2.00\hat{i} + 4.00\hat{j} - 3.00\hat{k}$. Encuentra el vector $\vec{R} = 3\vec{P} - \frac{5}{2}\vec{Q}$ expresando tu respuesta:

a) Con componentes en función de los vectores unitarios $\hat{i}, \hat{j}$ y $\hat{k}$.
Respuesta: $(\vec{R} = -2.00\hat{i} - 1.00\hat{j} + 1.50\hat{k})$.

b) Por medio de su magnitud y los ángulos α, β, y θ, ángulos con respecto a cada uno de los ejes.
Respuesta: $(|\vec{R}| = 2.69, \alpha = 138^\circ, \beta = 112^\circ, \theta = 56^\circ)$.

c) Por medio de su magnitud y los ángulos θ (que forman con el eje *z*), y φ ángulo que hace la proyección del vector en el plano *x-y* con el eje *x* positivo.
Respuesta: $(\varphi = 154^\circ)$.

7. Se tienen los siguientes vectores

$$\vec{U} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$$
$$\vec{V} = \hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$
$$\vec{W} = -3\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$$

Calcula:

a) Un vector unitario en dirección de $\vec{V}$.
b) Un vector unitario en dirección de $\vec{W}$.
c) Un vector unitario en dirección de $\vec{V} - 3\vec{U}$.
d) Un vector unitario en dirección de $2\vec{U} - 3\vec{V} + \vec{W}$.

8. Se tienen los siguientes vectores

$$\vec{P} = \hat{i} - 3\hat{j} + 4\hat{k}$$
$$\vec{Q} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$$

$\vec{R} = -\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$

Calcula:

a) El vector $\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{P} - \frac{2}{3}\vec{Q} + \frac{1}{4}\vec{R}$.

b) El vector unitario en dirección de $\vec{S}$.

9. Tienes una caja de dimensiones $l = 31.2$ (cm), $a = 12.2$ (cm) y $h = 15.6$ (cm) de largo, ancho y altura respectivamente. Calcula la longitud de la diagonal de la caja (la distancia entre dos esquinas opuestas) por los dos métodos siguientes:

a) Por medios geométricos

b) Usa el método vectorial:

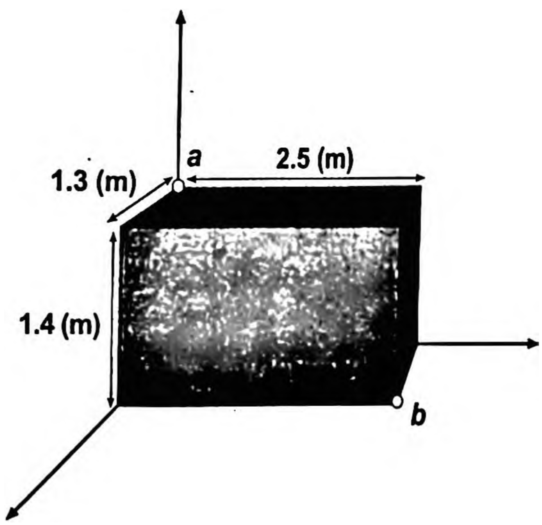
i. Define tu sistema de coordenadas de tal manera que el origen coincida con una esquina de la caja y los eje *x*, *y* y *z* positivos vayan en dirección de largo, ancho y altura, respectivamente.

ii. Define los vectores $\vec{l}$, $\vec{a}$ y $\vec{h}$, con los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$.

iii. Calcula la suma $\vec{d} = \vec{l} + \vec{a} + \vec{h}$. ¿Qué representa esta suma?

iv. Calcula la magnitud de $\vec{d}$. Compárala con la respuesta del inciso *a*).

10. De la siguiente figura



Calcula:

a) El vector desplazamiento $\vec{D}$ de la punta *a* al punto *b* en función de los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$.

b) Calcula la magnitud de $\vec{D}$.

11. Del problema anterior, calcula:

a) Los ángulos de los cosenos directores de $\vec{D}$.

b) Los ángulos θ y ϕ del vector $\vec{D}$.

12. Se tienen los siguientes vectores.

$$\vec{L} = 2.0\hat{i} - 5.0\hat{j}$$
$$\vec{M} = 3.0\hat{i} + 2.0\hat{j}$$

Calcula:

a) El vector $\vec{N} = \vec{L} + \vec{M}$.
b) El vector $\vec{P} = 3\vec{L} - 2\vec{M}$.
c) Un vector unitario en dirección $\vec{N}$.
d) Un vector unitario en dirección $\vec{P}$.

13. Se tienen los siguientes vectores.

$$\vec{a} = 3.0\hat{i} - 2.0\hat{j} + 1.0\hat{k}$$
$$\vec{b} = 1.0\hat{i} - 1.0\hat{j} - 3.0\hat{k}$$
$$\vec{c} = -1.0\hat{i} - 2.0\hat{j} - 2.0\hat{k}$$

Calcula un vector en dirección $\vec{d}$ pero con magnitud 4.0 donde $\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} - 2\vec{c}$.

14. Se tienen dos vectores:

- $\vec{A}$ es un vector de magnitud 5.5, hace un ángulo de 120° con el eje $+z$ y su proyección en el plano *x-y* hace un ángulo de 35° con el eje $+x$.
- $\vec{B}$ es un vector de magnitud 3.4, hace un ángulo de 25° con el eje $+z$ y un ángulo de 100° con el eje $+y$.

a) Expresa $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en función de los vectores unitarios.
b) Encuentra la suma $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$.
c) Encuentra la magnitud y los ángulos de los cosenos directores de $\vec{C}$.

15. Se tienen dos vectores:

- $\vec{A}$ es de magnitud 3 unidades, hace un ángulo de 35° con el eje *z* positivo y su proyección en el plano *x-y* hace un ángulo de 21° con el eje *x* positivo.
- $\vec{B}$ es de magnitud 8 unidades, hace un ángulo de 120° con el eje *z* positivo y su proyección en el plano *x-y* hace un ángulo de 65° con el eje *x* positivo.

a) Calcula las componentes de cada vector.

b) Expresa $\vec{A}$ y $\vec{B}$ en función de los vectores unitarios $\hat{i}$, $\hat{j}$ y $\hat{k}$ (es decir, $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$).

c) Calcula el vector $\vec{C} = 2\vec{A} - 3\vec{B}$.

16. Se tienen los siguientes vectores:

$$\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$$
$$\vec{B} = -\hat{i} - 4\hat{j} - 5\hat{k}$$

Calcula para cada vector:

a) La magnitud.
b) Los ángulos θ y ϕ.
c) Los ángulos α, β, y θ.

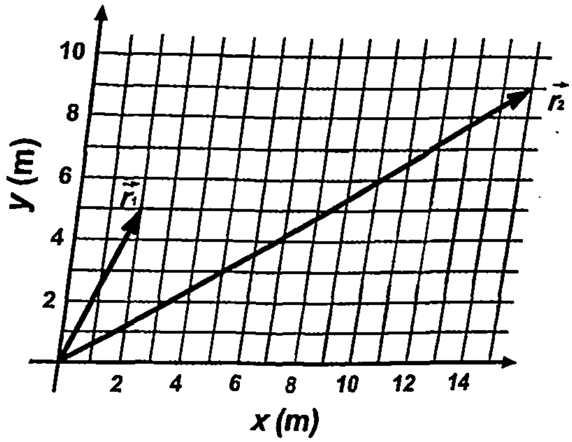
17. Se tiene un vector $\vec{H} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$, calcula:

a) Los ángulos que hace $\vec{H}$ con los ejes *x, y, z* positivos.
b) Los ángulos θ y ϕ.

18. Se tiene un vector $\vec{A}$ tal que los ángulos $\theta = 120°$ y $\phi = 300°$.

a) Calcula los ángulos α y β.
b) Calcula el vector unitario en dirección $\vec{A}$.

19. Una partícula se mueve en un plano como el representado en la siguiente figura:



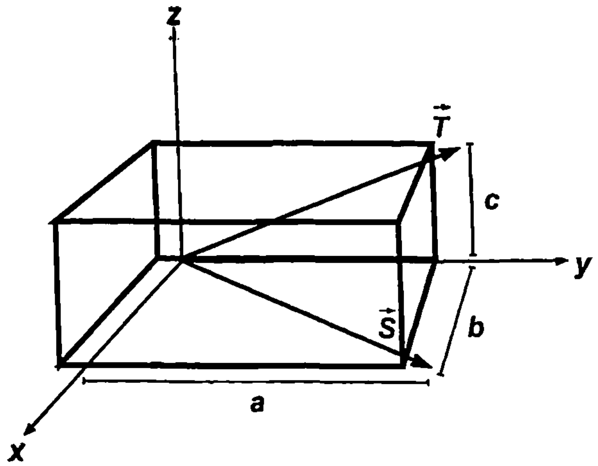
En $t_1 = 2.0$ (s) la partícula está en la posición dada por el vector posición $\vec{r}_1$ de la figura.
En $t_2 = 5.0$ (s) la partícula está en la posición dada por el vector posición $\vec{r}_2$.

a) Calcula el vector desplazamiento de la partícula desde t_1 a t_2.
b) Si la velocidad media de la partícula se define por

$$v = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

donde $\Delta\vec{r}$ es el desplazamiento y Δt es el intervalo de tiempo, calcula el vector velocidad media entre t_1 y t_2. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad media?

20. En la siguiente figura $a = 5.6$, $b = 2.2$ y $c = 2.0$.



Calcula la magnitud y los ángulos α, β y θ del vector $\vec{S}+\vec{T}$.

21. Considera los siguientes vectores

$$\vec{A}=3\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$$
$$\vec{B}=-\hat{i}+\hat{j}$$

a) Calcula $2\vec{A}-\vec{B}$.

b) Calcula la magnitud de $\vec{A}$.

c) Encuentra el vector unitario en la dirección del vector $\vec{B}$.

d) Encuentra el ángulo que hace el vector $\vec{A}$ con el eje z.

e) Encuentra el ángulo que hace el vector $2\vec{A}-\vec{B}$ con el eje x positivo.

22. Considera el siguiente vector

$$\vec{A}=7.0\hat{i}-2.0\hat{j}+3.0\hat{k}$$

a) Calcula la magnitud de este vector.
b) Encuentra un vector unitario que apunte en la misma dirección que este vector.
c) Encuentra un vector unitario que apunte en dirección contraria al vector $\vec{A}$.
d) Encuentra los valores de los cosenos directores asociados al vector $\vec{A}$.
e) Comprueba que la suma de los cuadrados de los cosenos directores es uno.
f) Encuentra la proyección del vector $\vec{A}$ sobre el plano x-y.
g) Encuentra el ángulo que hace esta proyección con el eje x.
h) ¿Qué ángulo hace esta proyección con el eje z? Comenta este resultado.
i) Calcula el ángulo ϕ.

j) Encuentra el ángulo que hay entre $\vec{A}$ y el eje *z*.
k) ¿Cuál es la proyección del vector $\vec{A}$ sobre el eje *y*?

23. Cuando un vehículo se mueve en una trayectoria no rectilínea se puede representar su posición por medio de un vector $\vec{r}$. Este vector es una composición de dos términos (o 3 si se mueve en 3-dimensiones) que son funciones del tiempo. Por ejemplo, el siguiente vector de posición representa una pelota lanzada al aire.

$$\vec{r}(t) = [1.0 + 15t]\hat{i} + [-5.0t^2]\hat{j}\,(\mathrm{m})$$

a) Encuentra el vector posición de la pelota en $t = 0$.
b) Encuentra el vector posición de la pelota en $t = 1.0$ (s).
c) Encuentra el desplazamiento de la pelota entre $t = 0$ y $t = 1.0$ (s).
d) Encuentra el desplazamiento de la pelota entre $t = 1.0$ y $t = 3.0$ (s).
e) Encuentra el vector unitario en la dirección del desplazamiento de la pelota entre $t = 1.0$ y $t = 3.0$ (s).

24. Considera la pelota lanzada del problema anterior, descrita por el vector de posición

$$\vec{r}(t) = [1.0 + 15t]\hat{i} + [-5.0t^2]\hat{j}\,(\mathrm{m})$$

La velocidad media en este caso se define como

$$v_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

y es un vector

a) Calcula la velocidad media entre $t = 0$ y $t = 3$ (s).
b) Calcula la velocidad media entre $t = 0$ y $t = 4$ (s).
c) Dibuja los dos vectores anteriores en un plano $x-y$.
d) Encuentra el ángulo que hay entre estos dos vectores.

25. El vuelo de un pájaro está descrito por medio del siguiente vector de posición

$$\vec{r}(t) = 10t\hat{i} + 15t\hat{j} + [50 + \mathrm{sen}(t)]\hat{k}\,(\mathrm{m})$$

donde t está medido en (s).

a) ¿Cuál es el vector desplazamiento realizado por el pájaro entre $t = 2.0$ (s) y $t = 5.0$ (s)?
b) Encuentra el vector unitario en la dirección del vector calculado en el inciso anterior.
c) ¿Cuál es la velocidad media del pájaro entre $t = 2.0$ (s) y $t = 5.0$ (s)?
d) Encuentra el vector unitario en la dirección del vector calculado en el inciso anterior.
e) ¿Cómo son estos dos vectores unitarios calculados? Explica por qué resulta así.
f) ¿Cuáles son los ángulos que hace este vector con los ejes *x*, *y* y *z*?

26. La velocidad instantánea de un cuerpo moviéndose en el espacio está dada por

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

es decir, la derivada de cada uno de los componentes del vector posición. Volvamos a utilizar la ecuación asociada al movimiento de un pájaro:

$$\vec{r}(t) = 10t\hat{i} + 15t\hat{j} + [50 + \operatorname{sen}(t)]\,\hat{k} \ \ (\mathrm{m})$$

Encuentra la velocidad instantánea para todo tiempo t.

13 PROBLEMAS DE Productos vectoriales

13.1 Problemas resueltos

1. Tenemos dos vectores

$$\vec{A} = 2\hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}$$

y

$$\vec{B} = -3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$$

a) Calcula el producto escalar entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Solución

Tenemos,

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{B} &= \left(2\hat{i} - 3\hat{j} - 7\hat{k}\right)\cdot\left(-3\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}\right)\\ &= -6\left(\hat{i}\cdot\hat{i}\right) + 4\left(\hat{j}\cdot\hat{j}\right) - 2\left(\hat{i}\cdot\hat{k}\right) + 9\left(\hat{j}\cdot\hat{i}\right) - 6\left(\hat{j}\cdot\hat{j}\right) + 3\left(\hat{j}\cdot\hat{k}\right) + 21\left(\hat{k}\cdot\hat{i}\right) - 14\left(\hat{k}\cdot\hat{j}\right) + 7\left(\hat{k}\cdot\hat{k}\right)\end{aligned}$$

sin embargo muchos de estos términos se hacen cero y los otros 1. Así,

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = -6 - 6 + 7 = -5$$

y así hemos encontrado el producto escalar entre estos dos vectores.

b) Calcula el ángulo que hay entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Solución

Cuando se tienen vectores en un plano es muy sencillo resolver este problema usando simplemente consideraciones geométricas, pero aquí estamos en un caso 3-dimensional y debemos proceder de otra manera. Para ello recordemos la definición del producto escalar de vectores

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

en el problema anterior ya calculamos $\vec{A}\cdot\vec{B}$, así que solamente nos faltaría calcular A y B para poder despejar el ángulo entre los dos vectores.

$$A = \sqrt{4 + 9 + 49} = \sqrt{62}$$

$$B = \sqrt{9+4+1} = \sqrt{14}$$

luego despejamos de la ecuación de arriba

$$\cos\theta = \frac{\bar{A}\cdot\bar{B}}{AB} = \frac{-5}{\sqrt{62}\sqrt{14}} = -.16971$$

Por lo tanto $\theta = 99.8°$.

c) Calcular el producto vectorial entre $\bar{A}$ y $\bar{B}$.

Solución

Tenemos

$$\begin{aligned}\bar{A}\times\bar{B} &= \left(2\hat{i}-3\hat{j}-7\hat{k}\right)\times\left(-3\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}\right)\\ &= -6\left(\hat{i}\times\hat{i}\right)+4\left(\hat{i}\times\hat{j}\right)-2\left(\hat{i}\times\hat{k}\right)+9\left(\hat{j}\times\hat{i}\right)-6\left(\hat{j}\times\hat{j}\right)+3\left(\hat{j}\times\hat{k}\right)+21\left(\hat{k}\times\hat{i}\right)-14\left(\hat{k}\times\hat{j}\right)+7\left(\hat{k}\times\hat{k}\right)\\ &= 4\hat{k}+2\hat{j}-9\hat{k}+3\hat{i}+21\hat{j}+14\hat{i}\\ &= 17\hat{i}+23\hat{j}-5\hat{k}\end{aligned}$$

2. Considera los siguientes vectores

$$\begin{aligned}\bar{A} &= a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}\\ \bar{B} &= c\hat{i}-a\hat{j}+b\hat{k}\end{aligned}$$

Se satisfacen las siguientes dos condiciones

$$\begin{aligned}\bar{A}\cdot\bar{B} &= d\\ \bar{A}\times\bar{B} &= d\hat{i}+d\hat{j}-d\hat{k}\end{aligned}$$

a) Demuestra que para que esto sea cierto deben cumplirse las siguientes dos condiciones

$$\begin{aligned}c &= a+b\\ b^2+ca &= d\end{aligned}$$

Solución

Usando la primera relación tenemos

$$\begin{aligned}\bar{A}\cdot\bar{B} &= \left(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k}\right)\cdot\left(c\hat{i}-a\hat{j}+b\hat{k}\right) = d\\ d &= ac\left(\hat{i}\cdot\hat{i}\right)-a^2\left(\hat{i}\cdot\hat{j}\right)+ab\left(\hat{i}\cdot\hat{k}\right)+bc\left(\hat{j}\cdot\hat{i}\right)-ab\left(\hat{j}\cdot\hat{j}\right)+b^2\left(\hat{j}\cdot\hat{k}\right)+c^2\left(\hat{k}\cdot\hat{i}\right)-ac\left(\hat{k}\cdot\hat{j}\right)+bc\left(\hat{k}\cdot\hat{k}\right)\\ d &= ac-ab+bc\end{aligned}$$

usando la segunda relación

$$\vec{A}\times\vec{B}=(a\hat{i}+b\hat{j}+c\hat{k})\times(c\hat{i}-a\hat{j}+b\hat{k})=d\hat{i}+d\hat{j}-d\hat{k}$$
$$=ac(\hat{i}\times\hat{i})-a^2(\hat{i}\times\hat{j})+ab(\hat{i}\times\hat{k})+bc(\hat{j}\times\hat{i})-ab(\hat{j}\times\hat{j})+b^2(\hat{j}\times\hat{k})$$
$$+c^2(\hat{k}\times\hat{i})-ac(\hat{k}\times\hat{j})+bc(\hat{k}\times\hat{k})$$
$$=-a^2\hat{k}-ab\hat{j}-bc\hat{k}+b^2\hat{i}+c^2\hat{j}+ac\hat{i}$$
$$=(b^2+ac)\hat{i}+(c^2-ab)\hat{j}-(a^2+bc)\hat{k}$$

igualando las componentes de los vectores, tenemos

$$d=(b^2+ac)=(c^2-ab)=(a^2+bc)$$

la primera igualdad es una de las dos relaciones que queremos demostrar

$$d=(b^2+ac)$$

usando la tercera igualdad y la relación del producto punto obtenida anteriormente

$$a^2+bc=ac-ab+bc$$
$$a^2=ac-ab$$
$$a=c-b$$

entonces

$$c=a+b$$

b) Encuentra un vector unitario que sea perpendicular a los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ al mismo tiempo.

Solución

Sabemos que el resultado del producto vectorial es perpendicular a los dos factores vectoriales. Así que encontramos el vector unitario del producto vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$. Para ello dividimos entre la magnitud de $\vec{A}\times\vec{B}$.

$$\hat{u}=\frac{\vec{A}\times\vec{B}}{|\vec{A}\times\vec{B}|}=\frac{d\hat{i}+d\hat{j}-d\hat{k}}{\sqrt{d^2+d^2+d^2}}=\frac{d\hat{i}+d\hat{j}-d\hat{k}}{\sqrt{3}d}=\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{i}+\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{j}-\frac{1}{\sqrt{3}}\hat{k}$$

3. Se definen los siguientes vectores

$$\vec{A}=\operatorname{sen}\alpha\cos\beta\hat{i}+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\hat{j}+\cos\alpha\hat{k}$$
$$\vec{B}=\cos\alpha\cos\beta\hat{i}+\cos\alpha\operatorname{sen}\beta\hat{j}-\operatorname{sen}\alpha\hat{k}$$

a) Calcula A.

Solución

$$A=\sqrt{(\operatorname{sen}\alpha\cos\beta)^2+(\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta)^2+(\cos\alpha)^2}$$

$$= \sqrt{\text{sen}^2\alpha\cos^2\beta i + \text{sen}^2\alpha\text{sen}^2\beta + \cos^2\alpha}$$
$$= \sqrt{\text{sen}^2\alpha\left(\cos^2\beta + \text{sen}^2\beta\right) + \cos^2\alpha}$$
$$= \sqrt{\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}$$
$$A = 1$$

b) Calcula B.

Solución

$$B = \sqrt{(\cos\alpha\cos\beta)^2 + (\cos\alpha\text{sen}\beta)^2 + (-\text{sen}\alpha)^2}$$
$$= \sqrt{\cos^2\alpha\cos^2\beta i + \cos^2\alpha\text{sen}^2\beta + \text{sen}^2\alpha}$$
$$= \sqrt{\cos^2\alpha\left(\cos^2\beta + \text{sen}^2\beta\right) + \text{sen}^2\alpha}$$
$$= \sqrt{\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha}$$
$$B = 1$$

c) Calcula $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

Solución

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= (\text{sen}\alpha\cos\beta\hat{i} + \text{sen}\alpha\text{sen}\beta\hat{j} + \cos\alpha\hat{k}) \cdot (\cos\alpha\cos\beta\hat{i} + \cos\alpha\text{sen}\beta\hat{j} - \text{sen}\alpha\hat{k}) \\ &= (\text{sen}\alpha\cos)(\cos\alpha\cos)\left(\hat{i} \cdot \hat{i}\right) + (\text{sen}\alpha\text{sen})(\cos\alpha\text{sen})\left(\hat{j} \cdot \hat{j}\right) - \text{sen}\alpha\cos\alpha\left(\hat{k} \cdot \hat{k}\right) \\ &= \text{sen}\alpha\cos\alpha\cos^2\beta + \text{sen}\alpha\cos\alpha\text{sen}^2\beta - \text{sen}\alpha\cos\alpha \\ &= \text{sen}\alpha\cos\alpha\left(\cos^2\beta + \text{sen}^2\beta\right) - \text{sen}\alpha\cos\alpha \\ &= \text{sen}\alpha\cos\alpha - \text{sen}\alpha\cos\alpha \\ &= 0\end{aligned}$$

4. Sean $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ y $\vec{B} = -2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$.

a) Encuentra el producto escalar entre estos dos vectores.

Solución

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= \left(\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}\right) \cdot \left(-2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}\right) \\ &= (1)(-2) + (2)(-3) + (1)(1) \\ &= -2 - 6 + 1 = -7 \\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= -7\end{aligned}$$

b) Calcula el ángulo entre estos dos vectores (utilizando el producto escalar obtenido).

Solución

Primero encontremos la magnitud de los vectores

$$A = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$$
$$B = \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{14}$$

Ahora usemos la definición del producto punto

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$
$$-7 = \left(\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{14}\right)\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{-7}{\left(\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{14}\right)}$$

Entonces

$$\theta = 140°$$

5. Sean $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}$ y $\vec{B} = -2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$.

a) Encuentra el producto vectorial entre estos dos vectores.

Solución

$$\vec{A}\times\vec{B} = \left(\hat{i} + 2\hat{j} + \hat{k}\right)\times\left(-2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}\right)$$
$$= (1)(-3)(\hat{k}) + (1)(1)(-\hat{j}) + (2)(-2)(-\hat{k}) + (2)(2)(\hat{i}) + (1)(-2)(\hat{j}) + (1)(-3)(-\hat{i})$$
$$= -3\hat{k} - \hat{j} + 4\hat{k} + 2\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{i}$$
$$\vec{A}\times\vec{B} = 5\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$$

b) Calcula el ángulo entre estos dos vectores (utilizando el producto vectorial obtenido).

Solución

Calculemos la magnitud del producto cruz

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \sqrt{(5)^2 + (-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{35}$$

Ahora usemos la definición del producto cruz

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = AB\operatorname{sen}\theta$$
$$\sqrt{35} = \left(\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{14}\right)\operatorname{sen}\theta$$
$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\sqrt{35}}{\left(\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{14}\right)}$$

Entonces

$$\theta = 40°$$

c) Explica por qué en este problema y en el anterior los ángulos calculados son diferentes, aun cuando los vectores son los mismos. ¿Cuál es el correcto?

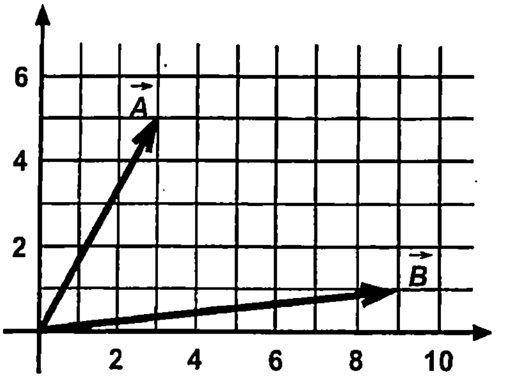
Solución

Observa que la función seno (usada en el producto vectorial) es positiva en ángulos de 0° a 180° y que el seno de α es igual al seno del ángulo suplementario $(180° - \alpha)$. La definición de la magnitud del producto vectorial no discrimina entre los dos ángulos. Si el ángulo entre los vectores es mayor a los 90°, el producto cruz no podría indicarlo. El ángulo que calcularía es su suplementario (como en esta ocasión sucedió). Por otra parte, la función coseno es positiva para ángulos menores a 90° y negativa para ángulos mayores a 90°. Si el ángulo entre dos vectores es mayor a 90°, el producto punto es negativo y el ángulo que calcula es mayor a 90°. Por lo tanto para calcular ángulos entre dos vectores es mejor usar el producto punto.

6. Considera los vectores $\vec{A} = 3.0\hat{i} + 5.0\hat{j}$ y $\vec{B} = 9.0\hat{i} + 1.0\hat{j}$.

a) Dibuja los vectores en un plano cartesiano.

Solución



b) Calcula gráficamente el ángulo entre los dos vectores.

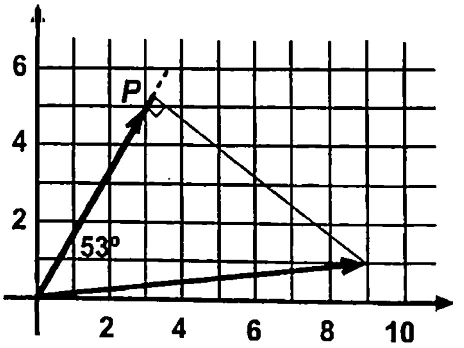
Solución

El ángulo de $\vec{B}$ con respecto al eje horizontal usando trigonometría, es: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{9}\right)$ que da 6.3° y el ángulo de $\vec{A}$ con respecto al mismo eje horizontal, usando la misma identidad trigonométrica, es: $\beta = \tan^{-1}\left(\frac{5}{3}\right)$ lo que da 59°. Es fácil ver que el ángulo entre estos dos vectores es la resta de los ángulos que forman con respecto al eje horizontal. Por lo que el ángulo entre ellos es de $\theta = 59° - 6.3° = 53°$.

c) Traza la proyección del vector $\vec{B}$ en dirección de $\vec{A}$ y gráficamente calcula el valor de esa proyección.

Solución

Para encontrar la proyección del vector $\vec{B}$ en dirección de $\vec{A}$ primero hacemos un esquema con los datos que ya tenemos:



la proyección esté remarcada en oscuro y se señala un ángulo recto; ahora para calcular el valor de esta proyección, vemos que hay un triángulo rectángulo en el que podemos conocer la hipotenusa (B) y conocemos un ángulo (53°), y queremos conocer el cateto adyacente al ángulo; para esto usamos el coseno que es la identidad que los relaciona, esto nos queda: $\cos(\theta) = \dfrac{\text{Proyección}}{B}$, pero tenemos que encontrar la magnitud de $\vec{B}$, esto lo encontramos como $B = \sqrt{(9)^2 + (1)^2}$ y nos queda 9.1 unidades y con este dato podemos ya despejar la proyección de la relación con el coseno y nos quedan 5.5 unidades.

d) Calcula el producto punto $\vec{A} \cdot \vec{B}$ usando los vectores expresados en función de $\hat{i}$ y $\hat{j}$.

Solución

Ahora calcularemos $\vec{A} \cdot \vec{B}$ usando los vectores expresados en función de $\hat{i}$ y $\hat{j}$, lo cual nos queda: $\vec{A} \cdot \vec{B} = (3\hat{i} + 5\hat{j}) \cdot (9\hat{i} + \hat{j}) = (9)(3) + (5)(1) = 32$.

e) Usa la definición del producto punto $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$ para calcular el ángulo entre los vectores (compara con tu resultado en *b*)).

Solución

Vamos a usar $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$ para calcular el ángulo entre los vectores, pero primero tenemos que calcular la magnitud de $\vec{A}$ que es $A = \sqrt{(3)^2 + (5)^2}$ que nos da 5.8 unidades, la magnitud de $\vec{B}$ ya la habíamos calculado como 9.1 unidades, ahora despejamos y sustituimos en la definición de producto punto, lo que nos queda $\theta = \cos^{-1}\left(\dfrac{32}{(9.1)(5.8)}\right)$ que resulta efectivamente en un ángulo de 53° como en el inciso *b*).

f) La proyección del vector $\vec{B}$ en dirección de $\vec{A}$ es $B\cos\theta$. Usa la definición del producto punto $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$ para calcular esta proyección (compara con tu resultado en *c*)).

Solución

Partiendo de que la proyección del vector $\vec{B}$ en dirección de $\vec{A}$ es $B\cos\theta$ y usando la definición del producto punto $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB\cos\theta$ vamos a calcular la proyección. Despejando nos queda: $B\cos\theta = \dfrac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{A}$, que al sustituir valores encontramos que la proyección es 5.5 unidades, concordando con el inciso *c*).

g) Para los vectores $\vec{C} = 2.0\hat{i} - 2.0\hat{j} + 5\hat{k}$ y $\vec{D} = -3.0\hat{i} + 4.0\hat{j} - 2.0\hat{k}$, encuentra el ángulo entre los vectores, el valor de la proyección del vector $\vec{C}$ en dirección de $\vec{D}$ y el valor de la proyección de $\vec{D}$ en dirección de $\vec{C}$.

Solución

Observando que para calcular el ángulo entre dos vectores es fácil calcularlo por medio del producto punto, entonces lo primero es encontrar las magnitudes de $\vec{C}$ y de $\vec{D}$ así como su producto punto. Las magnitudes nos quedan: $C=\sqrt{(2)^2+(-2)^2+(5)^2}=5.7$ por un lado y $D=\sqrt{(-3)^2+(4)^2+(-2)^2}=5.4$, por el otro. Ahora el producto punto nos quedaría: $\vec{C}\cdot\vec{D}=(2.0\hat{i}-2.0\hat{j}+5.0\hat{k})\cdot(-3.0\hat{i}+4.0\hat{j}-2.0\hat{k})=(2)(-3)+(-2)(4)+(5)(-2)=-24$ con estos tres resultados ya podemos encontrar lo demás, primero el ángulo que como hicimos antes nos queda $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{-24}{(5.4)(5.7)}\right)$ que son 141° entre ellos. Para la proyección de $\vec{C}$ en dirección de $\vec{D}$ nos queda $C\cos\theta=\frac{\vec{C}\cdot\vec{D}}{D}$ que si sustituimos los valores nos da −4.4 unidades y para la proyección de $\vec{D}$ en dirección de $\vec{C}$ cambia un poco la ecuación a $D\cos\theta=\frac{\vec{C}\cdot\vec{D}}{C}$ y nos da por resultado −4.2 unidades. Es importante ver que la proyección va en dirección opuesta a la del vector sobre el que se está proyectando, esto se puede ver desde que el ángulo que forman es mayor a 90°.

7. En cada una de las operaciones, indica si el resultado: i) es un vector, ii) es un escalar, iii) no se puede determinar ya que la operación está mal definida. En cada caso explica tu razonamiento y si se puede determinar un resultado, encuéntralo para los siguientes vectores: $\vec{A}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{B}=-\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{C}=2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}$ y $\vec{D}=\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k}$.

a) $\vec{A}\cdot\vec{B}$.

Solución

El resultado es un escalar, $\vec{A}\cdot\vec{B}=(3\hat{i}-1\hat{j}+2\hat{k})\cdot(-1\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k})=(3)(-1)+(-1)(2)+(2)(4)=3$.

b) $\vec{A}\times\vec{B}$.

Solución

El resultado es un vector, $\vec{A}\times\vec{B}=(3\hat{i}-1\hat{j}+2\hat{k})\times(-1\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k})=-4\hat{i}+6\hat{k}-2\hat{j}-12\hat{j}-4\hat{i}-\hat{k}=-8\hat{i}-14\hat{j}+5\hat{k}$.

c) $\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}$.

Solución

El resultado es un escalar, primero desarrollamos el producto cruz,

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\times\vec{C}=(3\hat{i}-1\hat{j}+2\hat{k})\cdot\left[(-\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k})\times(2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k})\right]=(3\hat{i}-1\hat{j}+2\hat{k})\cdot\left[-26\hat{i}+5\hat{j}-9\hat{k}\right]=101$$

d) $(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$.

Solución

El resultado es un vector, y usando el resultado de *b*) tenemos

$$(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}=(-8\hat{i}-14\hat{j}+5\hat{k})\times(2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k})=17\hat{i}-14\hat{j}-12\hat{k}$$

e) $(\vec{A}\times\vec{B})(\vec{C}\cdot\vec{D})$.

Solución

El resultado es un vector, y de nuevo echamos mano del inciso *b*).

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\left(\vec{C}\cdot\vec{D}\right)=\left(-8\hat{i}-14\hat{j}+5\hat{k}\right)\left[\left(2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}\right)\cdot\left(\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k}\right)\right]=\left(-8\hat{i}-14\hat{j}+5\hat{k}\right)[-22]$$
$$=176\hat{i}+308\hat{j}-110\hat{k}$$

f) $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)$.

Solución

Esta operación está mal definida pues no sabemos si el producto de los dos vectores es punto o cruz.

g) $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)$.

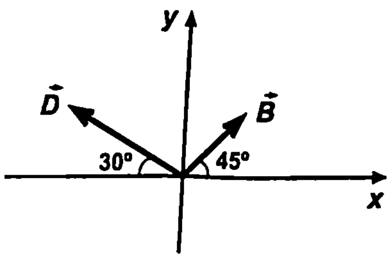
Solución

El resultado es un vector,

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)=\left(-8\hat{i}-14\hat{j}+5\hat{k}\right)\times\left[\left(2\hat{i}+5\hat{j}-3\hat{k}\right)\times\left(\hat{i}-3\hat{j}+3\hat{k}\right)\right]$$
$$=\left(-8\hat{i}-14\hat{j}+5\hat{k}\right)\times\left(6\hat{i}-9\hat{j}-11\hat{k}\right)=199\hat{i}+118\hat{j}+12\hat{k}$$

13.2 Problemas propuestos

1. En la siguiente figura se muestran dos vectores donde la magnitud de $\vec{B}$ es $B = 45$ unidades y la magnitud de $\vec{D}$ es $D = 65$ unidades.



a) Calcula, por medio de su definición, el producto punto $B\cdot D$.

Respuesta: $\left(\vec{B}\cdot\vec{D}=-7.6\times10^{2}\right)$.

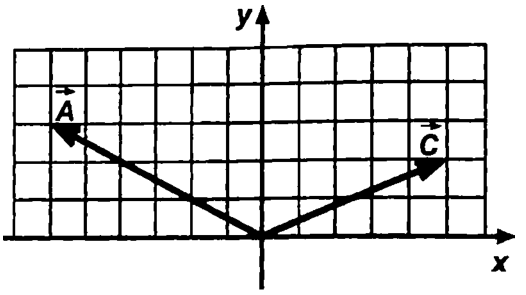
b) Calcula los componentes de los vectores $\vec{B}$ y $\vec{D}$ y expresa los vectores en función de los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$ (ejemplo $\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}$).

Respuesta: $\left(\vec{B}=32\hat{i}+32\hat{j}\right)$.

c) Calcula el producto punto $\vec{B}\cdot\vec{D}$ usando los vectores encontrados en *b*). Compara con tu respuesta en *a*).

Respuesta: (es la misma).

2. La siguiente figura muestra dos vectores.



a) Expresa los vectores en función de los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$.

Respuesta: $\left((\vec{A} = -6\hat{i} + 3\hat{j}),\ \vec{C} = 5\hat{i} + 2\hat{j}\right)$.

b) Calcula el producto punto $\vec{A} \cdot \vec{C}$.

Respuesta: $\left(\vec{A} \cdot \vec{C} = -24\right)$.

c) Interpreta el signo del producto punto entre los vectores, es decir, explica el porqué de este signo usando la gráfica.

Respuesta: (dirección opuesta).

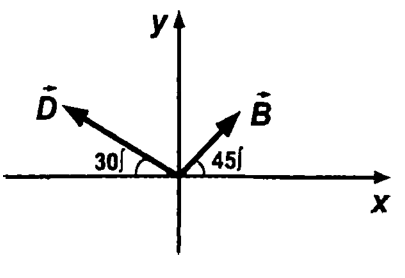
d) Calcula el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{C}$. Muestra claramente tu procedimiento.

Respuesta: $(\theta = 132°)$.

e) Encuentra un vector $\vec{B}$ que su componente en x sea -2 y que sea perpendicular a $\vec{C}$. Dibuja este vector en la gráfica.

Respuesta: $\left(\vec{B} = -2\hat{i} + 5\hat{j}\right)$.

3. Tomemos la situación del problema 1. En la siguiente figura se muestran dos vectores donde la magnitud de $\vec{B}$ es $B = 45$ unidades y la magnitud de $\vec{D}$ es $D = 65$ unidades.



a) Calcula, por medio de su definición, la magnitud del producto cruz $\vec{B} \times \vec{D}$.

Respuesta: $\left(|\vec{B} \times \vec{D}| = 2.8 \times 10^3\right)$.

b) ¿Qué dirección tiene el producto $\vec{B}\times\vec{D}$?
Respuesta: (hacia fuera de la página).

c) Calcula el producto cruz $\vec{B}\times\vec{D}$ usando los vectores encontrados en *b*) del problema. Compara con tu respuesta en los incisos *a*) y *b*).
Respuesta: $\left(\vec{B}\times\vec{D}=2.8\times10^{3}\hat{k}\right)$.

4. Sean los vectores $\vec{C}=2\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{D}=-3\hat{i}+4\hat{j}-\hat{k}$ y $\vec{E}=\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$.

Calcula:

a) $\vec{C}\cdot\vec{D}$ — *Respuesta:* $\left(\vec{C}\cdot\vec{D}=-15\right)$

b) $\vec{E}\times\vec{D}$ — *Respuesta:* $\left(\vec{E}\times\vec{D}=-7\hat{i}-5\hat{j}+\hat{k}\right)$

c) $\vec{C}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{D}\right)$ — *Respuesta:* $\left(\vec{C}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{D}\right)=-3\right)$

d) $\vec{E}\left(\vec{C}\cdot\vec{D}\right)$ — *Respuesta:* $\left(\vec{E}\left(\vec{C}\cdot\vec{D}\right)=-15\hat{i}+15\hat{j}-30\hat{k}\right)$

e) $\vec{E}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{D}\right)$ — *Respuesta:* $\vec{E}\cdot\left(\vec{E}\times\vec{D}\right)=0$

f) El ángulo entre $\vec{C}$ y $\vec{D}$ — *Respuesta:* $\left(\theta=169^{o}\right)$

g) La proyección de $\vec{D}$ en dirección de $\vec{C}$ — *Respuesta:* $\left(D\cos\theta=-5\right)$

5. Tenemos los siguientes vectores $\vec{A}=7.0\hat{i}+3.0\hat{j}$ y $\vec{B}=2.0\hat{i}+4.0\hat{j}$.

a) Dibuja los vectores en un plano cartesiano.

b) Traza un paralelogramo con los dos vectores y geométricamente calcula el área del paralelogramo.
Respuesta: (A = 22 unidades).

c) Calcula el producto cruz $\vec{A}\times\vec{B}$ usando los vectores expresados en función de $\hat{i}$ y $\hat{j}$. Calcula la magnitud de este producto.
Respuesta: $\left(\vec{A}\times\vec{B}=22\hat{k}\right)$.

d) Comparando la magnitud del producto cruz $\vec{A}\times\vec{B}$ con tu respuesta en *b*) expresa con tus propias palabras una interpretación geométrica de la magnitud del producto cruz.

e) Calcula el área del paralelogramo formado por los vectores $\vec{C}=3.0\hat{i}-1.0\hat{j}+5.0\hat{k}$ y $\vec{D}=-3.0\hat{i}+5.0\hat{j}+4.0\hat{k}$.
Respuesta: (A = 41 unidades).

6. Problema de investigación.

a) Investiga algunas aplicaciones del producto punto.
b) Investiga algunas aplicaciones del producto cruz.
c) Investiga y desarrolla un ejemplo simple pero ilustrativo sobre el triple producto escalar y su interpretación geométrica.

7. Considera dos vectores

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

Demuestra que

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

8. Considera dos vectores

$$\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

Demuestra que

$$\vec{A}\times\vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\hat{i} + \left(A_zB_x - A_xB_z\right)\hat{j} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\hat{k}$$

9. Considera los dos vectores que están en el plano x-y.

$$\vec{A} = 2\hat{i} + 3\hat{j}$$
$$\vec{B} = -7\hat{i} + \hat{j}$$

a) Dibuja estos dos vectores.
b) Sin utilizar el producto escalar (solamente trigonometría), encuentra el ángulo que hay entre $\vec{A}$ y el eje x.
c) Sin utilizar el producto escalar, encuentra el ángulo que hay entre $\vec{B}$ y el eje x.
d) Con los datos encontrados arriba. ¿Cuál es el ángulo que hay entre los dos vectores?
e) Utiliza el producto escalar para encontrar el ángulo que hay entre estos dos vectores.

10. Sean los vectores

$$\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j}$$
$$\vec{B} = -\hat{i} + 3a\hat{j}$$

Encuentra el valor que debe tener a para que estos dos vectores sean perpendiculares.

11. Se definen los siguientes vectores

$$\vec{A} = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta\hat{i} + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\hat{j} + \cos\alpha\hat{k}$$
$$\vec{B} = \cos\alpha\cos\beta\hat{i} + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta\hat{j} - \operatorname{sen}\alpha\hat{k}$$

a) Calcula A.
b) Calcula B.
c) Calcula $\vec{A}\cdot\vec{\boldsymbol{B}}$.
d) Calcula $\vec{A}\times\vec{B}$.

12. Para dos vectores arbitrarios $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

a) Demuestra en forma gráfica que el producto escalar de vectores es conmutativo, es decir

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$$

b) Demuestra en forma analítica que esta relación es cierta.

13. Sean $\vec{A}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ y $\vec{B}=-\hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}$.

a) Encuentra el producto escalar entre estos dos vectores.
b) Calcula el ángulo entre estos dos vectores.

14. Considera los dos vectores que están en el plano *x-y*.

$$\vec{A}=2\hat{i}+3\hat{j}$$
$$\vec{B}=-7\hat{i}+\hat{j}$$

a) Dibuja estos dos vectores e indica la dirección que tendría $\vec{A}\times\vec{B}$, entrando a la hoja o saliendo de ella.
b) Calcula $\vec{A}\times\vec{B}$.

15. Basados en el problema anterior.

a) Calcula $\vec{A}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)$.

b) ¿Podrías haber deducido el resultado anterior sin haber realizado el cálculo?

c) ¿Tiene sentido calcular $\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\times\vec{C}$?

16. Encuentra un vector perpendicular a $\vec{A}=2\hat{i}+3\hat{j}$ y $\vec{B}=-7\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$ a la vez y de magnitud 3.

17. Sean $\vec{A}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ y $\vec{B}=-\hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}$.

a) Encuentra el producto vectorial $\vec{A}\times\vec{B}$ entre estos dos vectores.

b) Demuestra que el vector resultante es perpendicular a $\vec{A}$ y a $\vec{B}$.

18. Sean $\vec{A}=\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ y $\vec{B}=-\hat{i}+3\hat{j}+7\hat{k}$.

a) Calcula $\vec{B}\times\vec{A}$, ¿qué diferencia hay con el problema anterior?

b) Sea $\vec{C}=2\hat{i}+3\hat{j}$, calcula $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\times\vec{C}$ y $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)$. ¿Son iguales estos dos productos?

19. Considera los vectores

$$\vec{A}=\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$$
$$\vec{B}=-\hat{i}+3\hat{j}$$

a) Encontrar el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

b) Evaluar $|\vec{A}\times\vec{B}|$.

c) Calcular $(\vec{B}\times\vec{A})\times\vec{A}$.

d) Encuentra el ángulo que hay entre $\vec{B}$ y $(\vec{B}\times\vec{A})\times\vec{A}$.

20. Se definen los siguientes vectores

$$\vec{A} = \cos\alpha\hat{i} + \sin\alpha\hat{j}$$
$$\vec{B} = -\sin\alpha\hat{i} + \cos\alpha\hat{j}$$

a) ¿Cuál es el ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$?

b) Encuentra un vector de magnitud 3 que sea perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$ al mismo tiempo.

21. Considera los siguientes vectores

$$\vec{A} = 3.2\hat{i} + a\hat{j} - 1.0\hat{k}$$
$$\vec{B} = -1.0\hat{i} + 1.0j - 2.9\hat{k}$$

a) ¿Cuánto debe valer a para que el vector $\vec{A}$ sea perpendicular al vector $\vec{B}$?

b) Encuentra un vector que sea perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$ al mismo tiempo.

22. En una región del espacio con campo magnético $\vec{B} = 5.0\times10^{-10}(\hat{i} - \hat{j})$ entra un electrón de carga $q = -1.6\times10^{-19}$ con una velocidad $\vec{\upsilon} = 3.2\times10^{3}\hat{k}$. (Se han omitido las unidades, sin embargo están en el Sistema Internacional.) Si la fuerza magnética que actúa sobre el electrón es $\vec{F} = q\vec{\upsilon}\times\vec{B}$, calcula:

a) El ángulo que hay entre $\vec{\upsilon}$ y $\vec{B}$.
b) La fuerza magnética que actúa sobre el electrón.

23. Considera los siguientes vectores

$$\vec{A} = 3.2\hat{i} + 2.2\hat{j} - 1.0\hat{k}$$
$$\vec{B} = -1.0\hat{i} + 1.0j - 2.9\hat{k}$$
$$\vec{C} = 5.1\hat{i} - 4.2\hat{j}$$

a) Calcula $\vec{B}\cdot(\vec{A}\times\vec{C})$.

b) Encuentra un vector que sea perpendicular a $\vec{A}$ y $(\vec{A}\times\vec{C})$ al mismo tiempo.

24. Considera los siguientes vectores

$$\vec{A} = 3.2\hat{i} + 2.2\hat{j} - 1.0\hat{k}$$

$$\vec{B} = -1.0\hat{i} + 1.0\hat{j} - 2.9\hat{k}$$
$$\vec{C} = 5.1\hat{i} - 4.2\hat{j}$$

a) Calcula $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$.

b) Encuentra el ángulo que hay entre los vectores $\vec{A}$ y $(\vec{B} \times \vec{C})$.

25. Considera los siguientes vectores

$$\vec{A} = 3.2\hat{i} + 2.2\hat{j} - 1.0\hat{k}$$
$$\vec{B} = -1.0\hat{i} + 1.0\hat{j} - 2.9\hat{k}$$

a) Calcula $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

b) Calcula $\vec{A} \times \vec{B}$.

c) Encuentra un vector unitario que sea perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$ al mismo tiempo.

26. Se tienen los dos vectores siguientes

$$\vec{A} = \hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$$
$$\vec{B} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$$

Calcula:

a) El producto escalar $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

b) El ángulo entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

c) La proyección de $\vec{A}$ sobre la dirección de $\vec{B}$.

d) La proyección de $\vec{B}$ sobre la dirección de $\vec{A}$.

e) El producto vectorial $\vec{A} \times \vec{B}$.

f) El producto vectorial $\vec{B} \times \vec{A}$.

g) El área formada por los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

h) Un vector unitario perpendicular a $\vec{A}$ y $\vec{B}$ a la vez.

i) ¿Cuánto es $\vec{A} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$? Comprueba tu respuesta analíticamente.

27. El **triple producto escalar** se define como

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$$

a) ¿El resultado de este producto es un escalar o un vector?

b) ¿Será necesario incluir los paréntesis? Explica.

c) Si definimos a

$$\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{B} = \hat{i} - j - \hat{k}$$
$$\vec{C} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$$

calcula su triple producto escalar.

d) Prueba por medio de operaciones que la siguiente identidad se cumple

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B} \cdot \left(\vec{C} \times \vec{A}\right)$$

28. El **triple producto vectorial** se define como

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right)$$

a) ¿El resultado de este producto es un escalar o un vector?
b) ¿Será necesario incluir los paréntesis? Explica.
c) Si definimos a

$$\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$$
$$\vec{B} = \hat{i} - j - \hat{k}$$
$$\vec{C} = \hat{i} + 3\hat{j} + \hat{k}$$

calcula su triple producto vectorial.

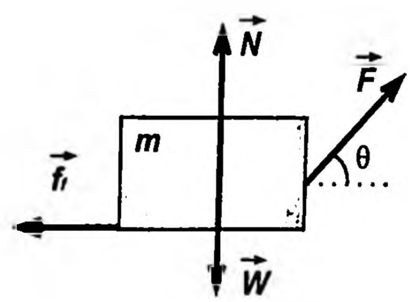
d) Prueba por medio de operaciones que la siguiente identidad se cumple:

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$$

14 PROBLEMAS DE Trabajo

14.1 Problemas resueltos

1. El diagrama de cuerpo libre de un objeto de masa m está representado en la siguiente figura



Donde la fuerza es $F = 45$ (N), el ángulo es $\theta = 25°$, el peso $w = 85$ (N) y la fuerza de fricción es $f_f = 32$ (N). Por la acción de estas fuerzas el objeto se mueve una distancia $d = 2.5$ (m).

a) Calcula el trabajo hecho por cada una de las fuerzas ($\vec{F}, \vec{w}, \vec{f}_f$ y $\vec{N}$).

Solución

Calculemos el trabajo por cada fuerza de acuerdo a la figura. Recuerda que la distancia es horizontal.

- $W_F = F\cos\theta d = (45)(\cos(25°))(2.5)\ (\text{J}) = 1.0\times10^2\ (\text{J})$.
- $W_w = w\cos 90° d = 0\ (\text{J})$.
- $W_f = f_f \cos 180° d = (32)(\cos(180°))(2.5)\ (\text{J}) = -80\ (\text{J})$.
- $W_N = N\cos 90° d = 0\ (\text{J})$.

b) Calcula cuánta debe ser la fuerza F para que sobre el objeto el trabajo total en la distancia d sea de cero.

Solución

$$W_{total} = W_F + W_w + W_f + W_N = F\cos\theta d + 0 + f_f\cos 180° d + 0$$

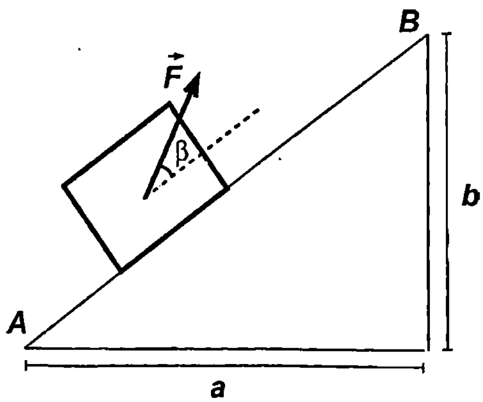
$$= F(\cos(25°))(2.5) - 80 = 0$$

$$F = \frac{80}{(\cos(25°))(2.5)} = 35$$

c) ¿Cómo va a ser cero el trabajo sobre el objeto si éste se mueve? Explica.
Solución

El trabajo total es cero pero no cada uno de los trabajos individuales. La fuerza F sí hace trabajo y en este caso la fuerza de fricción está haciendo el mismo trabajo, sólo que negativo.

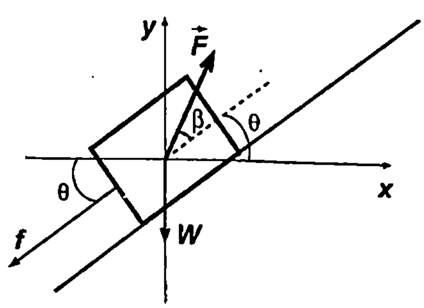
2. Considera la siguiente figura



En la que un bloque se mueve por la pendiente por medio de la fuerza $\vec{F}$ mostrada en la figura. Si $a = 3.0$ (m), $b = 2.0$ (m), la magnitud de la fuerza es 27 (N) y el ángulo $\beta = \pi/6$.

a) Calcula el trabajo hecho por la fuerza para llevar el bloque desde el punto A hasta el punto B.
Solución

De acuerdo con la figura



Calculemos vectorialmente $\vec{F} = F\cos(\beta+\theta)\hat{i} + F\text{sen}(\beta+\theta)\hat{j}$ donde

$$\theta = \tan^{-1}(b/a) = 33.7°$$

y $\beta = 30°$.

Tenemos

$$\vec{F} = 12\hat{i} + 24\hat{j}\,(\mathrm{N})$$

además

$$\Delta\vec{r} = a\hat{i} + b\hat{j} = 3.0\hat{i} + 2.0\hat{j}\,(\mathrm{m})$$

entonces

$$W_F = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = \left(12\hat{i} + 24\hat{j}\right)\cdot\left(3.0\hat{i} + 2.0\hat{j}\right) = 84\,(\mathrm{J}).$$

b) El peso del cuerpo es la fuerza debida a la atracción de la tierra y apunta siempre verticalmente hacia abajo. Si la magnitud de esta fuerza es $w = 18$ (N), calcula el trabajo hecho por el peso del cuerpo en el mismo trayecto.

Solución

De acuerdo a la figura

$$\vec{w} = -18\hat{j}$$

entonces

$$W_w = \vec{w}\cdot\Delta\vec{r} = \left(-18\hat{j}\right)\cdot\left(3.0\hat{i} + 2.0\hat{j}\right) = -36\,(\mathrm{J}).$$

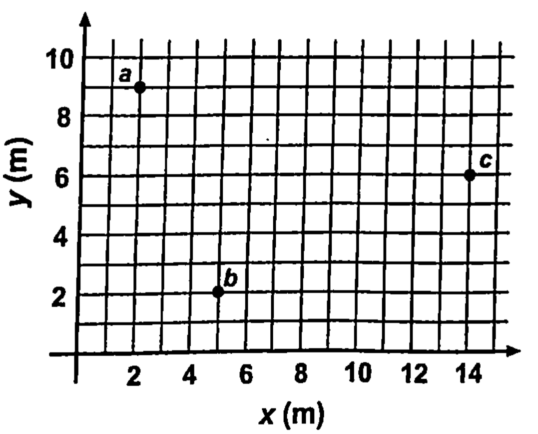
c) La fuerza de fricción es constante y apunta siempre en dirección contraria al movimiento del objeto. Si la magnitud de esta fuerza es de 2.3 (N), calcula el trabajo realizado por esta fuerza.

Solución

De acuerdo a la figura

$$\vec{f} = -2.3\cos\theta\hat{i} - 2.3\mathrm{sen}\theta\hat{j}$$
$$W_f = \vec{f}\cdot\Delta\vec{r} = \left(-2.3\cos\theta\hat{i} - 2.3\mathrm{sen}\theta\hat{j}\right)\cdot\left(3.0\hat{i} + 2.0\hat{j}\right) = -36\,(\mathrm{J}).$$

3. Un cuerpo se mueve desde el punto *a* hasta el punto *b* con una fuerza dada por $\vec{F}_1 = 2\hat{i} - 3\hat{j}\,(\mathrm{N})$, del punto *b* al punto *c* con una fuerza dada por $\vec{F}_2 = \hat{i} + 2\hat{j}$ (N), del punto *c* al punto *a* con una fuerza dada por $\vec{F}_3 = -3\hat{i} + 3\hat{j}$ (N) como se muestra en la siguiente figura:



Calcula el trabajo hecho por estas tres fuerzas sobre el objeto en su recorrido.
Solución

Calculemos los desplazamientos de la figura

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r}_{a-b} &= \vec{b}-\vec{a} = \left(5\hat{i}+2\hat{j}\right)-\left(2\hat{i}+9\hat{j}\right)=3\hat{i}-7\hat{j}\ (\text{m})\\ \Delta\vec{r}_{b-c} &= \vec{c}-\vec{b} = \left(14\hat{i}+6\hat{j}\right)-\left(5\hat{i}+2\hat{j}\right)=9\hat{i}+4\hat{j}\ (\text{m})\\ \Delta\vec{r}_{c-a} &= \vec{a}-\vec{c} = \left(2\hat{i}+9\hat{j}\right)-\left(14\hat{i}+6\hat{j}\right)=-12\hat{i}+3\hat{j}\ (\text{m})\end{aligned}$$

el trabajo entonces será

$$\begin{aligned}W &= \vec{F}_1\cdot\Delta\vec{r}_{a-b}+\vec{F}_2\cdot\Delta\vec{r}_{b-c}+\vec{F}_3\cdot\Delta\vec{r}_{c-a}\\ &= \left(2\hat{i}-3\hat{j}\right)\cdot\left(3\hat{i}-7\hat{j}\right)+\left(\hat{i}+2\hat{j}\right)\cdot\left(9\hat{i}+4\hat{j}\right)+\left(-3\hat{i}+3\hat{j}\right)\cdot\left(-12\hat{i}+3\hat{j}\right)\\ &= 27+17+45=89\ (\text{J}).\end{aligned}$$

4. En una región del espacio hay un campo eléctrico $\vec{E}=1.0\times10^{3}\hat{k}$ (V/m) e ingresa una carga eléctrica $q=1.6\times10^{-19}$ (C) que se mueve 2.2 [m] en dirección dada por el vector unitario $\hat{u}=\frac{1}{2}\hat{i}-\frac{\sqrt{3}}{2}\hat{k}$. Si la fuerza eléctrica está dada por $\vec{F}=q\vec{E}$, calcula el trabajo hecho por el campo eléctrico.
Solución

La fuerza es

$$\vec{F}=q\vec{E}=\left(1.6\times10^{-19}\right)\left(1.0\times10^{3}\hat{k}\right)=1.6\times10^{-16}\hat{k}\ \ (\text{N})$$

el desplazamiento es

$$\Delta\vec{r}=2.2\hat{u}(\text{m})=2.2\left(\tfrac{1}{2}\hat{i}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\hat{k}\right)(\text{m})=\tfrac{2.2}{2}\hat{i}-\tfrac{2.2\sqrt{3}}{2}\hat{k}\ (\text{m})$$

el trabajo será

$$W=\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}=\left(1.6\times10^{-16}\hat{k}\right)\cdot\left(\tfrac{2.2}{2}\hat{i}-\tfrac{2.2\sqrt{3}}{2}\hat{k}\right)=-3.0\times10^{-16}\ (\text{J}).$$

5. Una lancha se mueve de Playa Paraíso, que está en el punto P: (−1.0, −2.0, 0.0) a la isla del Tiburón, en el punto T: (−4.0, 6.0, 0.0) la distancia entre cada punto de coordenadas es de un kilómetro. La lancha tiene un motor que le da una fuerza $F_m=-200\hat{i}+900\hat{j}+100\hat{k}$ (N), el peso de la lancha es una fuerza $F_p=-200\hat{k}$ (N) y el viento le da una fuerza $F_v=-200\hat{i}-300\hat{j}-100\hat{k}$ (N).

a) Encuentra el vector desplazamiento de la lancha del punto P al T.
Solución

El vector desplazamiento lo encontramos restando P a T en cada una de las direcciones, esto es $\vec{D}=(-4-(-1))\hat{i}+(6-(-2))\hat{j}$ que como resultado escribimos: $\vec{D}=-3.0\hat{i}+8.0\hat{j}$ (km).

b) Calcula el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}_m$.

Solución

Para calcular el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}_m$ hacemos el producto escalar de esta fuerza por el vector desplazamiento, lo que es: $W_{F_m} = (-200\hat{i} + 900\hat{j} + 100\hat{k}) \cdot (-3.0\hat{i} + 8.0\hat{j}) = 600 + 7200 = 7.8 \times 10^3 (\text{kJ})$. Cabe mencionar que el trabajo se mide en Joules en el sistema mks, pero como estamos usando kilómetros, nos resulta en kilo Joules para unidades de trabajo.

c) Calcula el trabajo realizado por la fuerza F_v.

Solución

Para el trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}_m$, como en el inciso anterior, tenemos:

$$W_{F_v} = (-200\hat{i} - 300\hat{j} + 100\hat{k}) \cdot (-3\hat{i} + 8\hat{j}) = 600 - 2400 = -1.8 \times 10^3 (\text{kJ}).$$

d) Calcula el trabajo realizado por la fuerza F_p; sólo viendo la dirección del desplazamiento y la del peso. ¿Puedes predecir el resultado antes de calcularlo?

Solución

Como la fuerza F_p tiene dirección $-\hat{k}$ y el desplazamiento no tiene esta componente, el trabajo es cero, porque el producto punto de dos vectores perpendiculares es cero. Si hacemos el producto punto analíticamente nos daría cero.

e) Calcula el trabajo total sobre la lancha.

Solución

Para calcular el trabajo total sobre la lancha primero debemos sumar las otras fuerzas, que resultaría una operación como sigue: $\vec{F} = \vec{F}_p + \vec{F}_m + \vec{F}_v$ que resulta en una fuerza suma como $F_s = -400\hat{i} + 600\hat{j} - 200\hat{k}$, ahora con este dato sólo nos resta hacer el producto punto como en los incisos anteriores y ya está $W_t = \left(-400\hat{i} + 600\hat{j} - 200\hat{k}\right) \cdot \left(-3\hat{i} + 8\hat{j}\right) = 1200 + 4800 = 6.0 \times 10^3 (\text{kJ})$.

6. Si una fuerza que se ejerce sobre una partícula se describe por medio de la siguiente expresión:

$$F(x) = \begin{cases} 6.00\,(\text{N}) \text{ para } 0 \leq x < 9.00\,(\text{m}) \\ 3.00\,(\text{N}) \text{ para } 9.00 \leq x < 14.0\,(\text{m}) \\ -0.40\,(\text{N}) \text{ para } 14.0 \leq x < 15.5\,(\text{m}). \end{cases}$$

a) Calcula el trabajo realizado por la fuerza para llevar el cuerpo de $x = 0$ hasta $x = 9.00$ (m).

Solución

Como el movimiento se da sólo en una dirección, el producto punto es simplemente la multiplicación de las dos cantidades, así que el trabajo para esta fuerza constante sería $W = F\Delta x = (6.00)(9.00 - 0) = 54.0$ J).

b) Calcula el trabajo realizado por la fuerza para llevar el cuerpo de $x = 9.00$ hasta $x = 14.0$ (m).
Solución

Aquí tenemos otra fuerza constante en el intervalo así que el trabajo es $W = (3.00)(14.0-9$ $= 15.0$ (J).

c) Calcula el trabajo realizado por la fuerza para llevar el cuerpo de $x = 14.0$ hasta $x = 15.5$ (m).
Solución

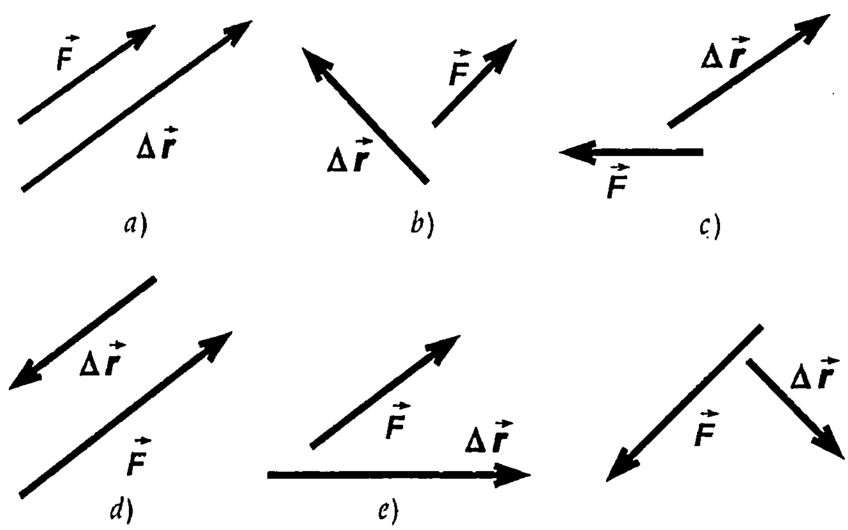
De manera similar al inciso anterior pero la fuerza es en dirección contraria $W = (-0.40)(15.5$ $-14.0) = 0.60$ (J).

d) Calcula el trabajo realizado por la fuerza para llevar el cuerpo de $x = 5.00$ hasta $x = 13.0$ (m).
Solución

En este caso, hay que usar la ecuación para fuerza constante por intervalos. Para la primera parte usamos la fuerza de 6.00 (N) con un desplazamiento de 4.00 (m), y para la segunda parte tenemos una fuerza de 3.00 (N) y un desplazamiento de 4.00 (m) también, así que el trabajo total nos queda: $W = (6.00)(4.00) + (3.00)(4.00) = 36.0$ (J).

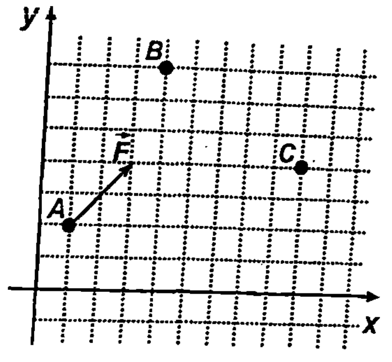
14.2 Problemas propuestos

1. En las siguientes gráficas tenemos los vectores fuerza sobre un objeto y desplazamiento del mismo. Menciona en cada caso, si el trabajo sobre el objeto es positivo, negativo o cero. Explica claramente tu razonamiento.



Respuesta:
a) positivo, *b*) cero, *c*) negativo, *d*) negativo, *e*) positivo, *f*) cero).

2. Sobre un objeto se ejerce una fuerza dada por $\vec{F} = 5.0\hat{i} + 5.0\hat{j}$ (N). El objeto se mueve en el plano de acuerdo a la siguiente figura donde las coordenadas están dadas en metros y cada división en los ejes es de 1.0 (m).



Calcula:

a) El trabajo hecho por la fuerza desde el punto A al punto B.
Respuesta: $(W_{AB} = 15 + 25 = 40)$.

b) El trabajo hecho por la fuerza desde el punto B al punto C.
Respuesta: $(W_{BC} = 10)$.

c) El trabajo hecho por la fuerza desde el punto C al punto A.
Respuesta: $(W_{CA} = -50)$.

3. Sobre un cuerpo de masa 0.75 (kg) se ejerce una fuerza constante $\vec{F} = 6.0\hat{i} - 3.5\hat{j} + 4.2\hat{k}$ (N).

a) ¿Cuál es el trabajo hecho por la fuerza F para mover el cuerpo del punto $(2.0, -3.5, 3.2)$ al punto $(7.4, -5.6, 6.5)$. La posición está dada en metros. Muestra tu procedimiento.
Respuesta: $(W = 54 \text{ (J)})$.

b) ¿Cuál es el trabajo hecho por el peso en el desplazamiento del inciso anterior? Considera el peso en el sentido del eje z negativo. Muestra tu procedimiento.
Respuesta: $(W = -24 \text{ (J)})$.

c) Si la fuerza $\vec{F}$ y el peso son las únicas fuerzas sobre el objeto, calcula el trabajo total realizado sobre el cuerpo por medio de tus respuestas en *a*) y *b*). Explica tu razonamiento.
Respuesta: $(W_{neto} = 30 \text{ (J)})$.

d) Calcula el trabajo total sobre el cuerpo por medio de la fuerza neta. Muestra tu procedimiento.
Respuesta: $(W_{neto} = 30 \text{ (J)})$.

4. Sobre un bloque de masa 8.00 (kg) se ejerce una fuerza constante $\vec{F}$ horizontal de 70.0 (N) de tal manera que el bloque se desliza hacia arriba 15.0 (m) sobre un plano inclinado que tiene un ángulo de 35.0° con respecto a la horizontal. Si sabemos que sobre el bloque se ejercen sólo la fuerza $\vec{F}$, el peso $\vec{w}$, la normal $\vec{N}$ y la fricción $\vec{f}$ (desde luego, opuesta al desplazamiento del bloque), resuelve:

a) Construye una gráfica de la situación donde muestres las fuerzas sobre el bloque.

b) Calcula el trabajo hecho sobre el bloque por la fuerza $\vec{F}$. Muestra tu procedimiento.

Respuesta: $(W = 860\ (\mathrm{J}))$.

c) Calcula el trabajo hecho sobre el bloque por el peso $\vec{w}$. Muestra tu procedimiento.

Respuesta: $(W = -675\ (\mathrm{J}))$.

d) Calcula el trabajo hecho sobre el bloque por la normal $\vec{N}$. Muestra tu procedimiento.

Respuesta: $(W_f = -185\ (\mathrm{J}))$.

e) Si el trabajo total en el desplazamiento hecho sobre el bloque es cero, ¿cuál es el trabajo hecho por la fricción $\vec{f}$? Explica tu razonamiento.

Respuesta: $(f = 13.3\ (\mathrm{J}))$.

f) De acuerdo a tu respuesta en el inciso anterior, calcula la fuerza de fricción. Muestra tu procedimiento.

Respuesta: $(f = 13.3\ (\mathrm{J}))$.

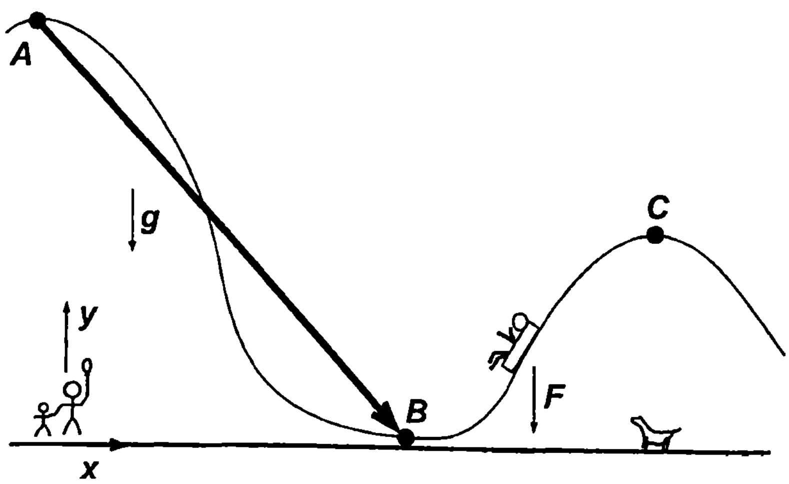
5. Un tren se mueve en su riel del punto *A*: (0.0, 2.0) al punto *B*: (2.0, 2.0) y está bajo la influencia de una fuerza $\vec{F}_1 = 3.0\hat{i} + 1.0\hat{j}$ (N) y otra fuerza $\vec{F}_2$. **Nota:** las coordenadas están dadas en metros.

a) ¿Cuánto debe valer la componente *x* de la fuerza $\vec{F}_2$ para que el trabajo total hecho por estas dos fuerzas sea cero?

Respuesta (−3.0 (N)).

b) Si el trabajo total sobre el objeto es cero de acuerdo al inciso *a*), ¿hay alguna restricción en este análisis para la componente *y* de la fuerza $\vec{F}_2$?

6. Considera la figura mostrada abajo, que corresponde a una montaña rusa en un parque de diversiones, Entre las personas y el punto *A*, hay 27 (m), de las personas al punto *B* hay 32 (m), entre el punto *B* y el perro hay 14 (m) y del perro al punto *C* hay 13 (m). Un carrito de esta montaña rusa, con todo y gente pesa 2000 (N)



a) Dibuja el vector desplazamiento desde el punto A al B. Elige un sistema de coordenadas de tal manera que el eje horizontal a la derecha es x positivo y el eje vertical es y positivo para escribir este vector en términos de los vectores unitarios $\hat{i}$ y $\hat{j}$. También escribe en términos de estos vectores unitarios la fuerza asociada al peso de un carrito de la montaña rusa.

Respuesta: ($F = -2000\hat{j}$ (N)).

b) Calcula por medio del producto escalar el trabajo realizado por el peso del carrito para llevarlo desde el punto A al B.

Respuesta: ($W_{AB} = 5.4\times10^4$ (J)).

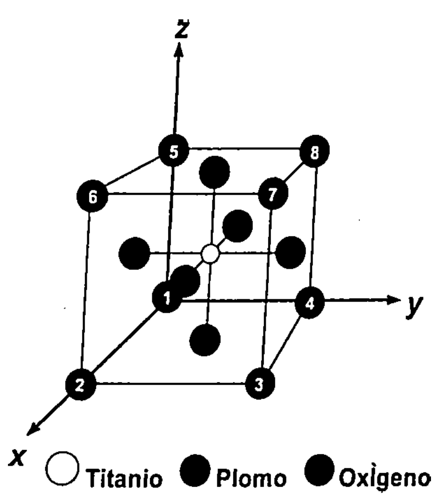
c) Calcula por medio del producto escalar el trabajo realizado por el peso del carrito para llevarlo desde el punto A al C.

Respuesta: ($W_{AC} = 2.8\times10^4$ (J)).

d) Calcula por medio del producto escalar el trabajo realizado por el peso del carrito para llevarlo desde el punto B al C.

Respuesta: ($W_{BC} = -2.6\times10^4$ (J)).

7. La siguiente figura representa la celda unitaria del Titanato de Plomo

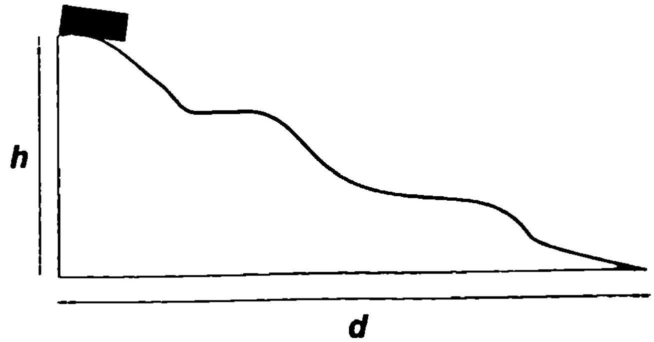


Consideremos una fuerza

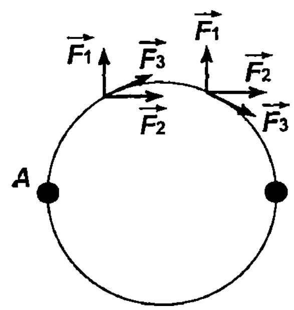
$$\vec{F} = \frac{F}{\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{F}{\sqrt{2}}\hat{k}$$

donde F es la magnitud de la fuerza. Esta fuerza constante se usa para mover un electrón desde el átomo de plomo 8 hasta el átomo de oxígeno 1. Encuentra el trabajo realizado por esta fuerza en función de F y a.

8. Calcula el trabajo hecho por el peso $(4.5\times10^4\ (N))$ cuando el bloque se mueve desde la parte más alta a la parte más baja de la colina mostrada en la siguiente figura, donde h = 35 (m) y d = 72 (m).



9. Una partícula se mueve desde el punto A hasta el punto B a lo largo del círculo de radio R = 2.0 (m) mostrado en la figura



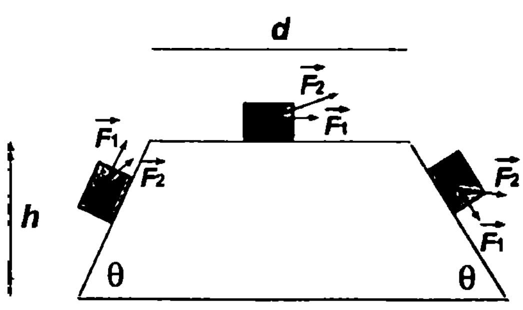
Calcula el trabajo hecho por las fuerzas en el recorrido si:

a) $\vec{F}_1$ $(F_1 = 5.0\ (\text{N}))$ es una fuerza constante vertical como lo muestra la figura.

b) $\vec{F}_2$ $(F_2 = 7.5\ (\text{N}))$ es una fuerza constante horizontal como lo muestra la figura.

c) $\vec{F}_3$ $(F_3 = 6.2\ (\text{N}))$ es una fuerza constante en magnitud que permanece siempre en la misma dirección del movimiento como lo muestra la figura.

10. Un cuerpo se mueve desde la parte más baja de la izquierda de un doble plano inclinado hasta la parte más baja de la derecha del mismo como se muestra en la figura.

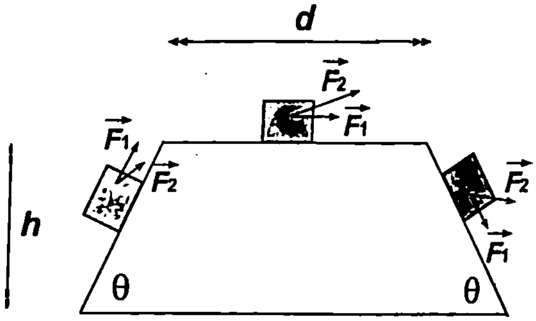


Donde en la figura $\theta = 50.0°$, $h = 2.50$ (m), $d = 2.00$ (m). Si $\vec{F}_1$ tiene como magnitud $F_1 = 45.0$ (N) y cambia de dirección en cada segmento como lo muestra la figura, y $\vec{F}_2$ tiene como magnitud $F_2 = 65.0$ (N) y tiene dirección de 30.0° con respecto a la horizontal, calcula:

a) El trabajo hecho por $\vec{F}_1$.

b) El trabajo hecho por $\vec{F}_2$.

11. Un cuerpo se mueve desde la parte más baja de la izquierda de un doble plano inclinado hasta la parte más baja de la derecha del mismo como se muestra en la figura.

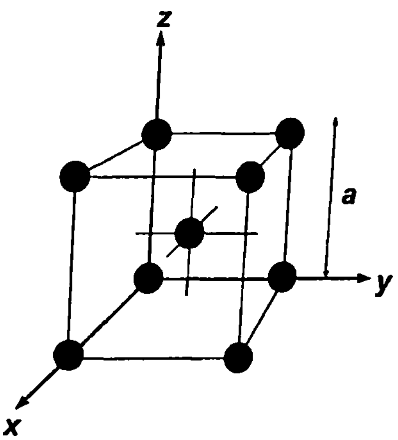


Donde en la figura $\theta = 50.0°$, $h = 2.50$ (m), $d = 2.00$ (m). Si $\vec{F}_1$ tiene magnitud constante pero cambia de dirección en cada segmento como lo muestra la figura, y $\vec{F}_2$ tiene como magnitud $F_2 = 65.0$ (N) con dirección constante, calcula:

a) La magnitud de $\vec{F}_1$ si el trabajo hecho por esta fuerza es 194 (J).

b) El ángulo que hace $\vec{F}_2$ con la horizontal si el trabajo que hace esta fuerza es 155 (J).

12. Tenemos una estructura cúbica como se muestra en la figura



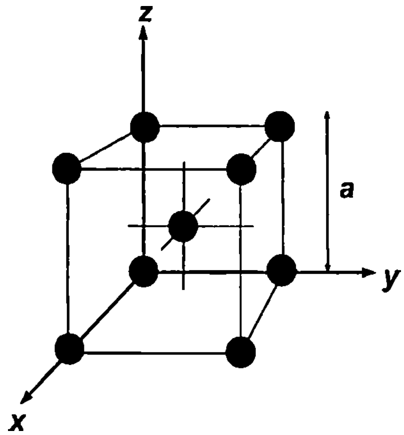
Existe una fuerza $\vec{F} = b\hat{i} - b\hat{j} + b\hat{k}$ (N) sobre los electrones de los átomos mostrados donde *b* es una constante.

a) Calcula el trabajo hecho por $\vec{F}$ para mover un electrón del átomo 1 al átomo 9 en términos de *a* y *b*.

b) Calcula el trabajo hecho por $\vec{F}$ para mover un electrón del átomo 5 al átomo 2 en términos de *a* y *b*.

c) Calcula el trabajo hecho por $\vec{F}$ para mover un electrón del átomo 4 al átomo 6 en términos de a y b.

13. Tenemos una estructura cúbica como se muestra en la figura

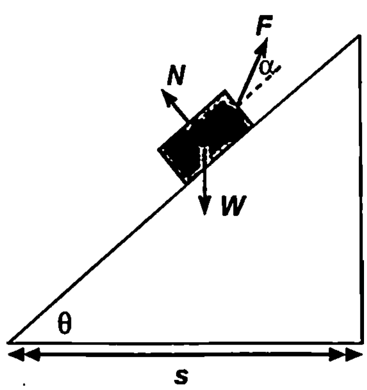


Existe una fuerza $\vec{F} = b\,\mathrm{sen}\theta\hat{j} + b\cos\theta\hat{k}$ (N) sobre los electrones de los átomos mostrados, donde b es una constante y θ es el ángulo que hace $\vec{F}$ con el eje z.

a) Calcula el trabajo hecho por $\vec{F}$ para mover un electrón del átomo 2 al átomo 8 en términos de θ, a y b.

b) ¿Cuánto debe ser el ángulo θ para que el trabajo hecho por $\vec{F}$ para mover un electrón del átomo 1 al átomo 3 sea de $W_{1\to 3} = -0.50ab$?

14. Tenemos un bloque que se mueve hacia arriba por un plano inclinado como lo muestra la siguiente figura



Calcula el trabajo realizado por cada una de las tres fuerzas mostradas en la figura para llevar el bloque desde la parte inferior hasta la parte superior del plano. Indica tus respuestas en función de la magnitud de cada fuerza, s, θ y α.

15. Sobre una partícula se ejercen 3 fuerzas

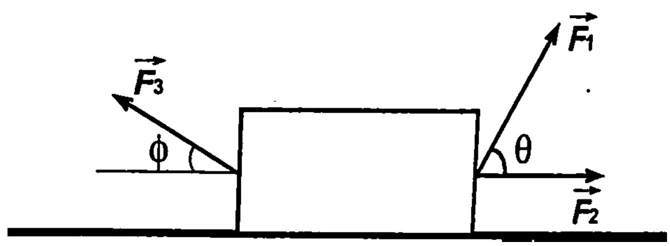
$$\vec{F}_1 = 3.0\hat{i} - 4.0\hat{j} \text{ (N)}$$

$$\vec{F}_2 = 1.5\hat{i} + 2.5\hat{j}\ (\mathrm{N})$$
$$\vec{F}_3 = -3.5\hat{i} - 2.0\hat{j}\ (\mathrm{N})$$

si la partícula se mueve desde el punto de coordenadas A (1, 4 ,2) hasta el punto de coordenadas B (-2, -2, 0) (donde las coordenadas están en (m)), calcula el trabajo total sobre la partícula de las siguientes maneras:

a) Como la suma de los trabajos de las fuerzas.
b) Por medio de la fuerza neta sobre la partícula.

16. Un bloque se mueve hacia la izquierda una distancia $s = 2.5$ (m) por la acción de tres fuerzas como lo muestra la figura. En la figura $F_1 = 15$ (N), $F_2 = 10$ (N), $\theta = 60°$ y $\phi = 30°$.

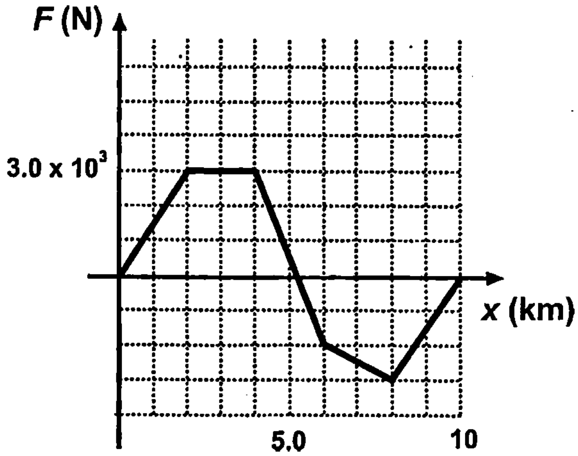


a) Calcula el trabajo que hace $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.
b) ¿Cuánto debe valer F_3 para que el trabajo total sobre el bloque sea cero?

15 PROBLEMAS DE Trabajo hecho por una fuerza variable

15.1 Problemas resueltos

1. Se arrastra un objeto una distancia de 10 (km) por medio de una fuerza variable en la misma dirección del desplazamiento dada por el dibujo siguiente



Calcula el trabajo total realizado por la fuerza en todo el trayecto explicando claramente tu procedimiento.

Solución

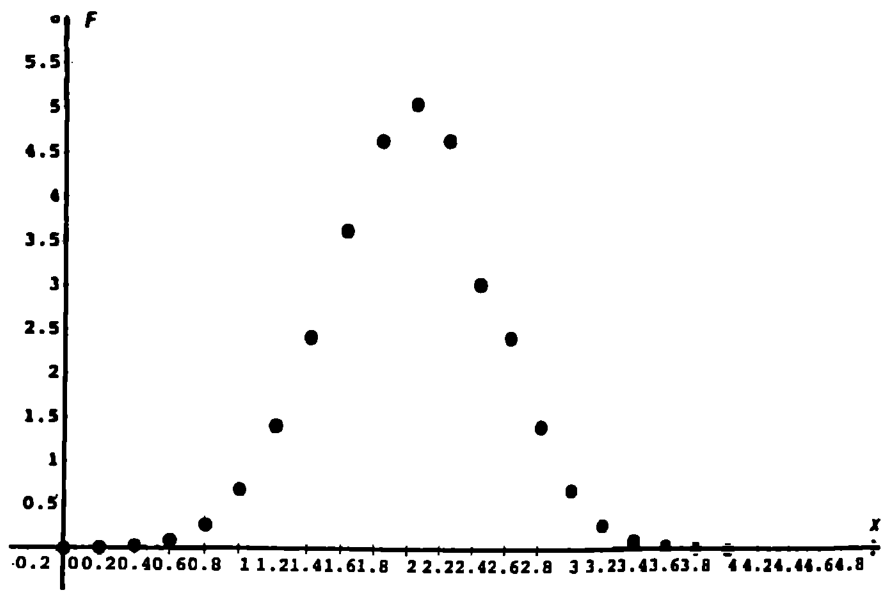
$$W_F = W_{0-2} + W_{2-4} + W_{4-6} + W_{6-8} + W_{8-10}$$
$$= \frac{0+3.0\times10^3}{2}(2.0) + \frac{3.0\times10^3+3.0\times10^3}{2}(2.0) + \frac{3.0\times10^3+\left(-2.0\times10^3\right)}{2}(2.0)$$
$$+ \frac{-2.0\times10^3+\left(3.0\times10^3\right)}{2}(2.0) + \frac{-3.0\times10^3+0}{2}(2.0)$$
$$= 2.0\times10^3 \text{ (J)}$$

2. En el laboratorio se obtiene la siguiente tabla donde se tabulan la posición de una partícula en una línea recta y la respectiva fuerza que se ejerce sobre ella en cada posición.

$x\,(m)$	$F\,(N)$	$x\,(m)$	$F\,(N)$	$x\,(m)$	$F\,(N)$
0	0	1.4	2.4	2.8	1.4
0.20	0.01	1.6	3.6	3.0	0.68
0.40	0.03	1.8	4.6	3.2	0.28
0.60	0.10	2.0	5.0	3.4	0.10
0.80	0.28	2.2	4.6	3.6	0.03
1.0	0.68	2.4	3.6	3.8	0.01
1.2	1.4	2.6	2.4	4.0	0

a) Grafica la fuerza en función de la posición.

Solución



b) Calcula, en forma aproximada, el trabajo hecho por la fuerza F sobre la partícula en su recorrido

Solución

Formemos intervalos de $\Delta x = 2.0$ (m). Observa que habrá 20 intervalos.

La fuerza promedio en el primer intervalo es $F_{p1} = \frac{1}{2}(0 + 0.01)(N)$.

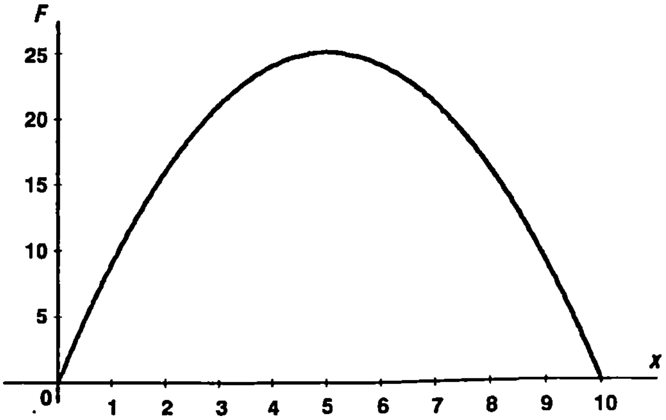
La fuerza promedio en el segundo intervalo es $F_{p2} = \frac{1}{2}(0.01 + 0.03)(N)$.

La fuerza promedio en el tercer intervalo es $F_{p3} = \frac{1}{2}(0.03 + 0.10)(N)$ y así sucesivamente. Tenemos entonces que el trabajo en forma aproximada es $W \approx (F_{p1} + F_{p2} + F_{p3} + \ldots)\Delta x$ ya que Δx es constante $W \approx 6.2$ (J).

3. La fuerza ejercida sobre un objeto que se mueve en línea recta está dada por $F(x) = -1.00x^2 + 10.0x$ (N) donde x es en metros.

a) Grafica la fuerza en función de x en el intervalo $0 \leq x \leq 10.0$ (m).

Solución



b) Calcula en forma aproximada con 5 intervalos, el trabajo hecho por F desde $x = 0$ a $x = 10.0$ (m).

Solución

$$\Delta x = 2.00 \text{ (m)}$$
$$F_{p1} = \tfrac{1}{2}\left(F(0) + F(2.00)\right)$$
$$F_{p2} = \tfrac{1}{2}\left(F(2.00) + F(4.00)\right)$$

Así llenamos la siguiente tabla

Intervalo (m)	*Fuerza promedio (N)*	*Intervalo (m)*
$x = 0$ a $x = 2.00$	8.00	2.00
$x = 2.00$ a $x = 4.00$	20.00	2.00
$x = 4.00$ a $x = 6.00$	24.00	2.00
$x = 6.00$ a $x = 8.00$	20.00	2.00
$x = 8.00$ a $x = 10.00$	8.00	2.00

Tenemos:

$$W \approx (8.0 + 20 + 24 + 20 + 8.0)(2.0) = 1.60 \times 10^2 \text{ J)}$$

c) Calcula en forma aproximada con 10 intervalos, el trabajo hecho por F desde $x = 0$ a $x = 10.0$ (m).

Solución

$$\Delta x = 1.00 \text{ (m)}$$
$$F_{p1} = \tfrac{1}{2}\left(F(0) + F(1.00)\right)$$
$$F_{p2} = \tfrac{1}{2}\left(F(1.00) + F(2.00)\right)$$

Así llenamos la siguiente tabla
Tenemos:

Intervalo (m)	*Fuerza promedio (N)*	*Intervalo (m)*
$x = 0$ a $x = 1.00$	4.50	1.00
$x = 1.00$ a $x = 2.00$	12.5	1.00
$x = 2.00$ a $x = 3.00$	18.5	1.00
$x = 3.00$ a $x = 4.00$	22.5	1.00
$x = 4.00$ a $x = 5.00$	24.5	1.00
$x = 5.00$ a $x = 6.00$	24.5	1.00
$x = 6.00$ a $x = 7.00$	22.5	1.00
$x = 7.00$ a $x = 8.00$	18.5	1.00
$x = 8.00$ a $x = 9.00$	12.5	1.00
$x = 9.00$ a $x = 10.00$	4.50	1.00

$$W = \begin{pmatrix} 4.5+12.5+18.5+22.5+24.5 \\ +24.5+22.5+18.5+12.5+4.5 \end{pmatrix}(1.0) = 1.65\times10^2 \text{ (J)}$$

4. Una fuerza $F = -2.00(x-1.00)^2 + 2.00$ (N) se aplica sobre un objeto para moverlo desde $x = 0$ hasta $x = 2.00$ (m). Calcula, en forma aproximada, el trabajo hecho por la fuerza sobre el objeto en este recorrido por medio del teorema de la fuerza promedio usando:

a) Tres intervalos.
Solución

En primer lugar debemos definir los tres intervalos que queremos usar, éstos son: $0 \leq x < 0.67$, $0.67 \leq x < 1.33$ y $1.33 \leq x < 2.00$, ahora haremos la evaluación de la función en los puntos del intervalo, $F(0) = -2.00(0-1.00)^2 + 2.00 = 0$ (N), también $F(0.67) = -2.00(0.67-1.00)^2 + 2.00$, = 1.78 (N) por otro lado tenemos también $F(1.33) = -2.00(1.33-1.00)^2 + 2.00 = 1.78$ (N) y finalmente tenemos la fuerza en el otro extremo: $F(2.00) = -2.00(2.00-1.00)^2 + 2.00 = 0$ (N). Ahora calcularemos las fuerzas promedio para cada intervalo, esto es: $F_1 = \frac{1.78+0}{2} = 0.89$ (N), $F_2 = \frac{1.78+1.78}{2} = 1.78$ (N) y $F_3 = \frac{1.78+0}{2} = 0.89$ (N); con esto ya podemos calcular el trabajo, este es: $W = 0.89(0.67) + 1.78(0.66) + 0.89(0.67) = 2.37$ (J).

b) Seis intervalos.
Solución

Ahora con seis intervalos, primero los definimos $0 \leq x < 0.33$, $0.33 \leq x < 0.67$, $0.67 \leq x < 1.00$, $1.00 \leq x < 1.33$, $1.33 \leq x < 1.67$ y $1.67 \leq x < 2$, ahora evaluamos la fuerza en los puntos que no habíamos evaluado ya, éstos son:

$$F(0.33) = -2.00(0.33-1.00)^2 + 2.00 = 1.10$$
$$F(1.00) = -2.00(1.00-1.00)^2 + 2.00 = 2.00$$

$$F(1.67) = -2.00(1.67-1.00)^2 + 2.00 = 1.10$$

y de nuevo calculamos las fuerzas promedio para cada intervalo:

$$F_1 = \frac{1.10+0}{2} = 0.55$$

$$F_2 = \frac{1.78+1.10}{2} = 1.44$$

$$F_3 = \frac{1.78+2.00}{2} = 1.89$$

$$F_4 = \frac{2.00+1.78}{2} = 1.89$$

$$F_5 = \frac{1.78+1.10}{2} = 1.44$$

$$F_6 = \frac{1.10+0}{2} = 0.55$$

y ya con estas fuerzas calculamos el trabajo de forma parecida al inciso anterior

$$W = 0.55(0.33) + 1.44(0.34) + 1.89(0.33) + 1.89(0.33) + 1.44(0.34) + 0.55(0.33) = 2.59$$

el trabajo es de 2.59 (J).

5. Usando los datos del problema anterior:

a) Calcula el trabajo hecho por la fuerza sobre el objeto de $x = 0$ hasta $x = 2.00$ (m) de manera exacta usando la integral de la función de fuerza.

Solución

Usando la integral de fuerza, en este caso no es necesario parametrizar porque ya tenemos la ecuación y no es necesario dividir porque es una sola ecuación para todo el rango, planteándola y resolviéndola nos queda:

$$W = \int_0^2 \left(-2.00(x-1.00)^2 + 2.00\right)dx = \frac{-2.00(x-1.00)^3}{3} + 2.00x$$

$$= \frac{-2.00(2.00-1.00)^3}{3} + 2.00(2.00)$$

que al evaluar nos queda $W = 3.33$ (J).

b) Calcula el porcentaje de error de tu respuesta en *a*) con tu respuesta de tres intervalos del problema anterior.

Solución

Para calcular el error sólo le restamos la respuesta que obtuvimos a la correcta, a esa resta la dividimos entre la respuesta correcta y la multiplicamos por cien para que sea error porcentual, hay que recordar que se toma el valor absoluto. De modo que nos queda:

$$Err = \left|\frac{3.33 - 2.37}{3.33}\right| * 100 = 28.8\%$$

c) Calcula el porcentaje de error de tu respuesta en *a*) con tu respuesta de seis intervalos del problema anterior.

Solución

Haciendo lo mismo que en el inciso anterior: $Err = \left|\frac{3.33 - 2.59}{3.33}\right| * 100 = 22.2\%$.

15.2 Problemas propuestos

1. Sobre un objeto se ejerce la siguiente fuerza

$$F = \begin{bmatrix} 2.0\,(\mathrm{N})\ \mathrm{de}\ 0 \le x < 4.0\,(\mathrm{m}) \\ 0\,(\mathrm{N})\ \mathrm{de}\ 4.0 \le x < 6.0\,(\mathrm{m}) \\ -4.0\,(\mathrm{N})\ \mathrm{de}\ 6.0 \le x < 9.0\,(\mathrm{m}) \\ 3.0\,(\mathrm{N})\ \mathrm{de}\ 9.0 \le x \le 10\,(\mathrm{m}) \end{bmatrix}$$

a) Construye una gráfica de fuerza *versus* posición. Además, calcula:

b) El trabajo hecho por la fuerza sobre el objeto desde $x = 0$ hasta $x = 4.0$ (m).

Respuesta: $(W_{0-4} = 8.0\,(\mathrm{J}))$.

c) El trabajo hecho por la fuerza sobre el objeto desde $x = 6.0$ hasta $x = 9.0$ (m).

Respuesta: $(W_{6-9} = -12\,(\mathrm{J}))$.

d) El trabajo hecho por la fuerza sobre el objeto desde $x = 2.0$ hasta $x = 8.0$ (m).

Respuesta: $(W_{2-8} = -8.0\,(\mathrm{J}))$.

e) El trabajo hecho por la fuerza sobre el objeto desde $x = 0$ hasta $x = 10$ (m).

Respuesta: $(W_{0-10} = -1.0\,(\mathrm{J}))$.

2. La fuerza ejercida sobre un objeto que se mueve en línea recta está dada por $F = -1.0x^2 + 6.0x + 16$ (N), donde x está en metros.

a) Construye una gráfica de la fuerza F en función de x en el intervalo $0 \le x \le 8.0$ (m).

b) Calcula, en forma aproximada con 8 intervalos, el trabajo hecho por F desde $x = 0$ a $x =$ 8.0 (m).

Respuesta: $(W = 1.5\times10^2 \text{ (J)})$.

c) Calcula, por medio de la integral, el trabajo hecho por *F* desde $x = 0$ a $x = 8.0$ (m).

Respuesta: $(W = 1.5\times10^2 \text{ (J)})$.

d) Compara los resultados de *a*) y *b*).

Respuesta: (son iguales).

3. En el laboratorio se obtiene la siguiente tabla donde se registra la posición de una partícula en una línea recta y la respectiva fuerza que se ejerce sobre ella en cada posición.

x (m)	*F (N)*	*x (m)*	*F (N)*	*x (m)*	*F (N)*	*x (m)*	*F (N*
0	0	1.2	1.4	2.4	3.6	3.6	0.03
0.20	0.01	1.4	2.4	2.6	2.4	3.8	0.01
0.40	0.03	1.6	3.6	2.8	1.5	4.0	0
0.60	0.10	1.8	4.6	3.0	0.68		
0.80	0.28	2.0	5.0	3.2	0.28		
1.0	0.68	2.2	4.6	3.4	0.10		

a) Construye una gráfica de la fuerza en función de la posición.

b) Calcula, en forma aproximada, el trabajo hecho por la fuerza *F* sobre la partícula en su recorrido.

Respuesta: $(W = 6.2 \text{ (J)})$.

4. Sobre una partícula se ejerce la fuerza $F(x) = 6.00x^2$ (N).

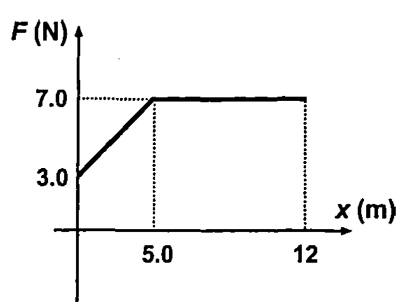
a) Si el trabajo que realiza la fuerza sobre la partícula es de 250 (J) al moverla de $x = 0$ a $x = a$. Encuentra *a*.

Respuesta: $(a = 5.00 \text{ (m)})$.

b) La misma fuerza realiza un trabajo de 670 (J) en desplazarla de $x = 2.00$ (m) a $x = b$. Encuentra *b*.

Respuesta: $(b = 7.00 \text{ (m)})$.

5. Una cuenta sobre un alambre sólo puede moverse en una dirección, y tiene la influencia de una fuerza con la dirección en la que puede moverse. La cuenta se mueve sobre el alambre desde $x = 0$ hasta $x = 12$ (m). Calcula el trabajo hecho por la fuerza sobre la cuenta en este recorrido de la siguiente manera:

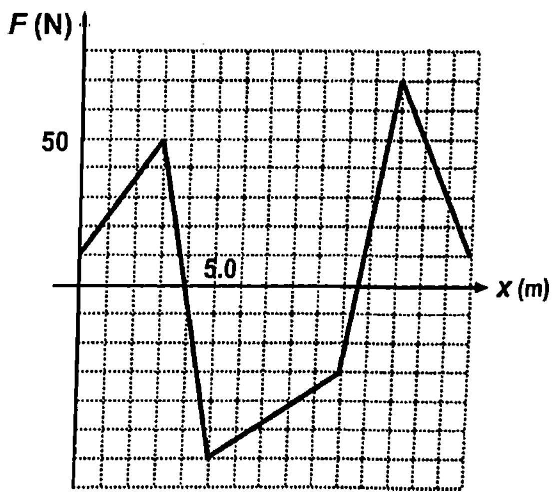


a) Por medio del área bajo la curva.
Respuesta: (74 (J)).

b) Usando el teorema de la fuerza promedio.
c) Usando integrales.

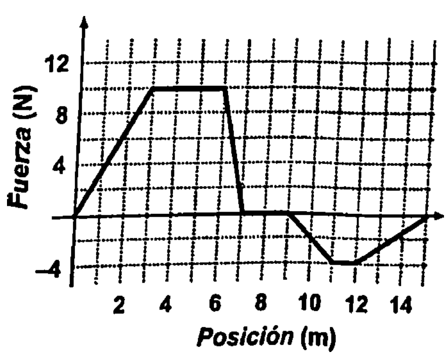
6. El arrancón de un coche de carreras puede simularse como un objeto que se mueve en línea recta con una velocidad que sigue esta ecuación $v = 80[1 - \exp(-t)]$ (m/s) donde el tiempo está dado en segundos. Calcula el desplazamiento del objeto desde $t = 0$ hasta $t = 5.00$ (s) sabiendo que el área bajo la curva de una gráfica de velocidad *versus* tiempo representa el desplazamiento de la partícula. Muestra claramente tu procedimiento.
Respuesta: (320 (m)).

7. Se tiene una fuerza aplicada a un objeto permitiéndole moverse en una línea recta. La gráfica de la fuerza puede observarse a continuación:



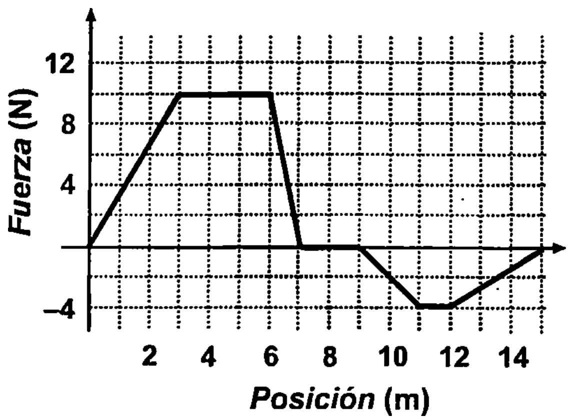
a) Calcula el trabajo hecho por la fuerza entre $x = 0$ y $x = 15$ (m).
b) ¿A qué distancia del origen está el objeto cuando el trabajo realizado por la fuerza desde $x = 0$ se anula?
c) ¿Se vuelve a repetir este caso más adelante? Si es así, ¿en qué posición?

8. Sobre una partícula se ejerce una fuerza variable de acuerdo a la siguiente gráfica.



Encuentra dos posiciones x tal que el trabajo desde $x = 0$ hasta esa posición sea de 36 (J).

9. Sobre una partícula se ejerce una fuerza variable de acuerdo a la siguiente gráfica.



Calcula el trabajo hecho por la fuerza en los siguientes intervalos:

a) De $x = 0$ a $x = 4.0$ (m).
b) De $x = 6.0$ a $x = 9.0$ (m).
c) De $x = 8.0$ a $x = 12.0$ (m).
d) De $x = 0$ a $x = 15.0$ (m).

10. La fuerza ejercida sobre un cuerpo viene dada por la siguiente expresión

$$F(x) = 2.3x^3 - 1.4x \text{ (N)}$$

donde la posición está medida en metros.

a) Completa la siguiente tabla de valores

x (m)	F (N)
1.0	
1.8	
2.4	
3.3	
5.0	

b) Calcula el trabajo realizado por la fuerza entre $x = 1.0$ (m) y $x = 5.0$ (m) utilizando los valores de la tabla.
c) Calcula el trabajo realizado por la fuerza entre $x = 1.0$ (m) y $x = 5.0$ (m) utilizando dos intervalos iguales.

11. Considera la siguiente tabla de valores donde se muestra la fuerza aplicada sobre un cuerpo que se mueve en el eje x.

x (m)	F (N)
0	0
0.50	1.6
1.0	2.8
1.5	3.3
2.0	3.0

Encuentra el trabajo realizado por la fuerza entre $x = 0$ y $x = 2.0$ (m).

12. La fuerza ejercida sobre un cuerpo para arrastrarlo es

$$F(x) = 3.3x^2 \text{ (N)}$$

calcula el trabajo realizado por la fuerza para arrastrar el cuerpo desde $x = 2.0$ hasta $x = 4.0$ (m) utilizando cuatro intervalos iguales.

13. Considera la siguiente tabla de valores donde se muestra la fuerza aplicada sobre un cuerpo que se mueve en el eje x.

x (m)	F (N)
2.0	13
2.8	26
3.5	40
3.8	48
4.0	53

Encuentra el trabajo realizado por la fuerza entre $x = 2.0$ y $x = 4.0$ (m).

14. La fuerza ejercida sobre un cuerpo para arrastrarlo es

$$F(x) = 3.0x^3 \text{ (N)}$$

calcula el trabajo realizado por la fuerza para arrastrar el cuerpo desde $x = 2.0$ hasta $x = 4.0$ (m) utilizando cuatro intervalos iguales.

15. Considera la siguiente tabla de valores que muestra la fuerza ejercida sobre un cuerpo en algunos valores de x.

x (m)	F (N)	x (m)	F (N)
2.2	12	5.6	10
3.0	15	6.6.	10
3.7	17	7.0	10
5.0	15	7.5	15
5.2	12	8.0	15

a) **Grafica la fuerza *vs.* la posición.**

b) Calcula el trabajo realizado por esta fuerza para llevar un cuerpo desde $x = 5.0$ hasta $x = 8.0$ (m).

16. Se aplica una fuerza

$$F(x) = 2.3x^2 - 1.0\mathrm{sen}(2.0x)\ (\mathrm{N})$$

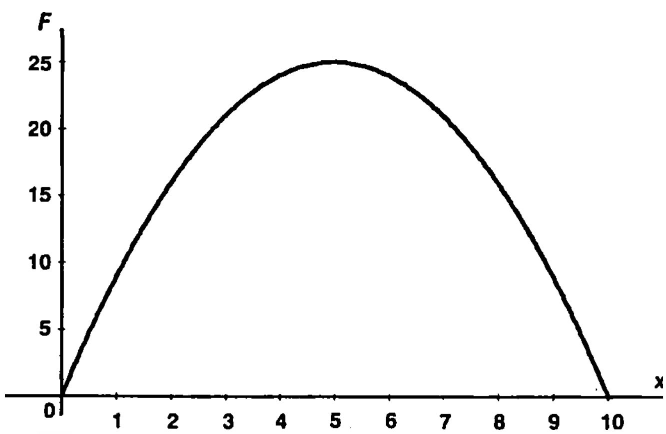
donde x está medido en metros. Calcula el trabajo realizado por esta fuerza para llevar un objeto desde $x = 2.0$ hasta $x = 7.0$ (m), utilizando 10 intervalos.

17. La siguiente fuerza se ejerce sobre un cuerpo

$$F = \begin{cases} 2x\ (\mathrm{N})\ \text{para}\ 0 \leq x \leq 4\ (\mathrm{m}). \\ 8.0\ (\mathrm{N})\ \text{para}\ 4 \leq x \leq 6\ (\mathrm{m}). \\ 14 - x\ (\mathrm{N})\ \text{para}\ 6 \leq x \leq 14\ (\mathrm{m}). \end{cases}$$

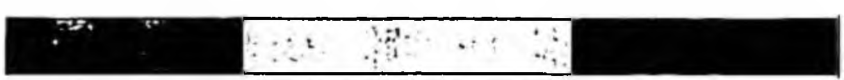
a) Grafica la fuerza en función de la posición.
b) Calcula el trabajo de F sobre el cuerpo de $x = 2.0$ a $x = 12$ (m).

18. Sobre un cuerpo se ejerce una fuerza como se muestra en la figura (F está dada en (N) y x en (m))



Calcula el trabajo hecho por la fuerza sobre el cuerpo de $x = 0$ a $x = 10$ (m). Explica cada paso que tomes.

19. Al principio del semestre estudiamos el concepto de densidad. Cuando un objeto tiene una gran longitud en comparación con sus otras dos dimensiones conviene usar el concepto de densidad lineal. Observa la siguiente figura.



Es una barra formada por dos tipos de materiales. El primer material (azul) tiene una densidad de masa lineal $\lambda_a = 3.7$ (kg/m), mientras que el material rojo es un poco más denso con $\lambda_r = 5.2$ (kg/m). La primera barra azul mide 2.0 (m), la segunda mide 3.0 (m) y la tercera mide 1.0 (m).

a) Realiza una gráfica para la barra, donde en el eje horizontal esté indicada la coordenada x de la longitud de la barra y en el eje vertical la densidad lineal de la barra (toma como origen, $x = 0$, al inicio de la primera barra azul).

b) ¿Qué representa el área bajo la curva de la gráfica que dibujaste?

c) Encuentra la masa que tiene el trozo de barra que va desde $x = 1.0$ hasta $x = 5.5$ (m).

d) ¿En qué punto de la barra deberíamos cortarla de tal modo que la dividamos en dos partes con igual masa?

e) Explica con tus propias palabras la relación de este problema con el material del capítulo de *Trabajo Hecho por una Fuerza Variable* del texto.

16 PROBLEMAS DE Integrales

16.1 Problemas resueltos

1. La fuerza ejercida sobre un objeto que se mueve en línea recta está dada por

$$F(x) = -1.00x^2 + 10.0x \text{ (N)}$$

donde x es en metros.

a) Calcula por medio de la integral, el trabajo hecho por F desde $x = 0$ a $x = 10.0$ (m).

Solución

$$\begin{aligned} W &= \int F(x)dx \\ &= \int_0^{10} \left[-1.00x^2 + 10.0x\right] dx \\ &= -1.00\left(\frac{x^3}{3}\right) + 10.0\left(\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{10} \\ &= -1.00\left(\frac{10^3}{3}\right) + 10.0\left(\frac{10^2}{2}\right) - 0 \\ &= 1.67\times 10^2 \text{ (J)} \end{aligned}$$

b) Compara los resultados de este método con los resultados en el problema 1 de los problemas resueltos del capítulo anterior.

Solución

Los métodos del capítulo anterior son soluciones aproximadas a la solución de *a*). Muy buena aproximación aun con 4 intervalos.

c) Encuentra una fuerza constante que ejercida sobre el objeto de $x = 0$ a $x = 10.0$ (m) haga el mismo trabajo.

Solución

Observa que el área bajo la curva debe ser igual, entonces

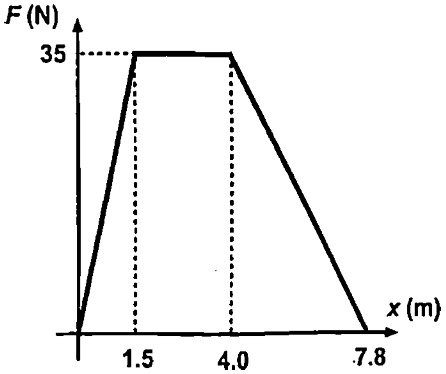
$$W_F = F\Delta x = 1.67\times 10^2 \text{ (J)}$$

Entonces

$$F=\frac{1.67\times10^{2}\,(\mathrm{J})}{\Delta x}$$

$$=\frac{1.67\times10^{2}\,(\mathrm{J})}{10.0\,(\mathrm{m})}=16.7\ (\mathrm{N})$$

2. La fuerza sobre una partícula de masa $m = 1.00$ (kg) es variable con la posición de la partícula como lo muestra las siguiente figura



Calcula el trabajo hecho por la fuerza sobre la partícula por los siguientes dos métodos:

a) Calcula el trabajo por medio del área bajo la curva.

Solución

Tenemos

$$W=\frac{0+35}{2}(1.50-0)+\frac{35+35}{2}(4.0-1.5)+\frac{35+0}{2}(7.8-4.0)=1.8\times10^{2}\ (\mathrm{J})$$

b) Calcula el trabajo por medio de la integral. Para esto, en cada intervalo encuentra la ecuación que representa la fuerza e integra esta ecuación.

Solución

Primera recta

$$F(x)-0=\frac{35-0}{1.5-0}(x-0)$$

$$F(x)=\frac{70}{3}x\ (\mathrm{N})$$

para $x = 0$ a $x = 1.5$ (m).

Segunda recta

$$F(x)=35\ (\mathrm{N})$$

para $x = 1.5$ a $x = 4.0$ (m).

Tercera recta

$$F(x)-0=\frac{35-0}{4.0-7.8}(x-7.8)$$

$$F(x)=-\frac{35}{3.8}(x-7.8)\ (\mathrm{N})$$

para $x = 4.0$ a $x = 7.8$ (m).

Entonces el trabajo es:

$$W=\int_0^{1.5}\left(\frac{70}{3}x\right)dx+\int_{1.5}^{4.0}35dx+\int_{4.0}^{7.8}\left(-\frac{35}{3.8}(x-7.8)\right)dx$$

$$=\frac{70}{3}\frac{x^2}{2}\bigg|_0^{1.5}+35x\Big|_{1.5}^{4.0}-\frac{35}{3.8}\left(\frac{x^2}{2}-7.8x\right)\bigg|_{4.0}^{7.8}$$

$$=\frac{35}{3}\left(1.5^2-0\right)+35(4.0-1.5)-\frac{35}{3.8}\begin{bmatrix}\left(\frac{1}{2}7.8^2-(7.8)(7.8)\right)\\-\left(\frac{1}{2}4.0^2-(7.8)(4.0)\right)\end{bmatrix}$$

$$=1.8\times10^2\ (\mathrm{J}).$$

c) Compara tus resultados de *a*) y *b*):

Solución

Iguales

3. Calcula el trabajo hecho por las siguientes fuerzas en los intervalos definidos:

a) $F(x)=5.0x^2-3.0x$ (N) en el intervalo de $x = 1.0$ a $x = 4.0$ (m).

Solución

$$W=\int_{1.0}^{4.0}\left(5.0x^2-3.0x\right)dx$$

$$=5.0\frac{x^3}{3}-3.0\frac{x^2}{2}\bigg|_{1.0}^{4.0}$$

$$=\frac{5.0}{3}\left(4.0^3-1.0^3\right)-\frac{3.0}{2}\left(4.0^2-1.0^2\right)=82\ (\mathrm{J})$$

b) $F(x)=1.0x^{1/2}+4.0x^{-3/2}$ (N) en el intervalo de $x = 4.0$ a $x = 16$ (m).

Solución

$$W=\int_{4.0}^{16}\left(1.0x^{1/2}+4.0x^{-3/2}\right)dx$$

$$= 1.0\frac{x^{3/2}}{3/2} + 4.0\frac{x^{-1/2}}{-1/2}\Bigg|_{4.0}^{16}$$

$$= \frac{2.0}{3}\left(16^{3/2} - 4.0^{3/2}\right) - 8.0\left(16^{1/2} - 4.0^{-1/2}\right) = 39\ (\mathrm{J})$$

c) $F(x) = 3.0\mathrm{sen}(x) - 2\exp(x)$ (N) en el intervalo de $x = 1.0$ a $x = 3.0$ (m).

Solución

$$W = \int_{1.0}^{3.0}\left(3.0\mathrm{sen}(x) - 2\exp(x)\right)dx$$

$$= -3.0\cos(x) - 2.0\exp(x)\Big|_{1.0}^{3.0}$$

$$= -3.0[\cos(3.0) - \cos(1.0)] - 2.0[\exp(3.0) - \exp(1.0)] = -30\ (\mathrm{J})$$

d) $F(x) = \frac{2\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)}$ (N) en el intervalo de $x = 2.0$ a $x = 5.0$ (m).

Solución

Primero reducimos la expresión

$$F(x) = \frac{2\mathrm{sen}(x)}{\cos(x)} = 2\tan(x)$$

y buscamos la integral de la función encontrada

$$W = \int_{2.0}^{5.0}\left(2\tan(x)\right)dx$$

$$= 2.0\left[\ln|\sec(x)|\right]_{2.0}^{5.0} = 2.0\left[\ln|\sec(5.0)|\right] - 2.0\left[\ln|\sec(2.0)|\right] = 0.77\ (\mathrm{J})$$

e) $F(x) = \frac{\cos(2x) + \mathrm{sen}^2(x) - \mathrm{sen}(2x)}{\cos(x)}$ (N) en el intervalo de $x = 0$ a $x = \pi/2$ (m).

Solución

Primero reducimos la expresión

$$F(x) = \frac{\cos(2x) + \mathrm{sen}^2(x) - \mathrm{sen}(2x)}{\cos(x)}$$

sabemos que

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \mathrm{sen}^2(x)$$

$$\mathrm{sen}(2x) = 2\mathrm{sen}(x)\cos(x)$$

sustituyendo

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \frac{\cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) - 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\cos(x)} \\
&= \frac{\cos^2(x) - 2\operatorname{sen}(x)\cos(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos(x)[\cos(x) - 2\operatorname{sen}(x)]}{\cos(x)} \\
&= \cos(x) - 2\operatorname{sen}(x)
\end{aligned}
$$

y tenemos

$$
\begin{aligned}
W &= \int_0^{\pi/2} [\cos(x) - 2\operatorname{sen}(x)]\, dx \\
&= \operatorname{sen}(x) + 2\cos(x)\Big|_0^{\pi/2} \\
&= [\operatorname{sen}(\pi/2) + 2\cos(\pi/2)] - [\operatorname{sen}(0) - 2\cos(0)] = -1.0 \text{ (J)}
\end{aligned}
$$

16.2 Problemas propuestos

1. Calcula las siguientes antiderivadas:

a) $\int \left(5x^4 - 3x^2 - 5x + 8\right) dx.$

b) $\int \left(\frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x + \frac{6}{7}\right) dx.$

c) $\int \left(3x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{2}{3}}\right) dx.$

d) $\int \left(\frac{3}{x} - \frac{4}{x^2} + \frac{5}{x^3}\right) dx.$

e) $\int \left(3\operatorname{sen}x + 4.5e^x\right) dx.$

2. La fuerza ejercida sobre un objeto que se mueve en línea horizontal está dada por $F(x) = x^2$ (N) donde x es en metros.

a) Grafica la fuerza F en función de x en el intervalo $0 \leq x \leq 14$ (m).
b) Calcula encontrando el área bajo la curva, el trabajo hecho por F desde $x = 2$ a $x = 12$ (m).
c) Calcula en forma aproximada con 10 intervalos, el trabajo hecho por F desde $x = 2$ a $x = 12$ (m).
d) Calcula por medio de la integral, el trabajo hecho por F desde $x = 2$ a $x = 12$ (m).
e) Compara los resultados de los tres métodos.

3. La fuerza ejercida sobre un objeto que se mueve en línea horizontal está dada por $F(x) = 5x$ (N) donde x es en metros.

a) Grafica la fuerza F en función de x.

b) Calcula, encontrando el área bajo la curva, el trabajo hecho por F desde $x = 5$ a $x = 10$ (m).
c) Calcula en forma aproximada con 5 intervalos, el trabajo hecho por F desde $x = 5$ a $x = 10$ (m).
d) Calcula por medio de la integral, el trabajo hecho por F desde $x = 5$ a $x = 10$ (m).

4. Se tiene una fuerza $F(x) = 10\exp(x)$ (N) sobre un objeto.

a) Grafica la fuerza $F(x)$ en función de x en el intervalo de $x = 0$ a $x = 1$ (m).
b) Calcula el trabajo hecho por $F(x)$ desde $x = 0$ a $x = 1$ (m) aproximando tu respuesta con 10 intervalos.
c) Calcula el trabajo exacto, por medio de la integral, en el mismo intervalo y compara tus respuestas.

5. La fuerza ejercida sobre un cuerpo viene dada por la siguiente expresión

$$F(x) = 2x^3 - 1.4x \text{ (N)}$$

a) Calcula el trabajo realizado por la fuerza entre $x = 1.0$ y $x = 5.0$ (m).
b) Calcula exactamente el trabajo realizado por la fuerza entre $x = 1.0$ y $x = 5.0$ (m).

6. La fuerza ejercida por un cuerpo para arrastrarlo es

$$F(x) = 3.3\text{sen}(x) \text{ (N)}$$

Calcula el trabajo realizado por la fuerza para arrastrar el cuerpo desde $x = 0$ hasta $x = 2.0$ (m) en forma exacta.

7. La fuerza ejercida por un cuerpo para arrastrarlo es

$$F(x) = 3.0x^3 \text{ (N)}$$

Calcula el trabajo realizado por la fuerza para arrastrar el cuerpo desde $x = 2.0$ hasta $x = 4.0$ (m) en forma exacta.

8. Se aplica una fuerza

$$F(x) = 2.3x^2 - 1.0\text{sen}(x) + 3.0e^x \text{ (N)}$$

donde x está medido en metros. Calcula el trabajo realizado por esta fuerza para llevar un objeto desde $x = 2.0$ hasta $x = 7.0$ (m) utilizando integrales.

9. Se aplica una fuerza

$$F(x) = 2.3x^2 - 1.0\text{sen}(2.0x) \text{ (N)}$$

donde x está medido en metros. Calcula el trabajo realizado por esta fuerza para llevar un objeto desde $x = 2.0$ hasta $x = 7.0$ (m) utilizando integrales.

10. Antes vimos que la aceleración de una partícula se define como

$$a = \frac{dv}{dt}$$

a) Demuestra con la ecuación anterior, que la velocidad de la partícula para cualquier tiempo es

$$\upsilon(t) = \upsilon_0 + \int_0^t a\,dt$$

donde υ_0 es la velocidad en $t = 0$.

b) Si una partícula parte del reposo con una aceleración dada por

$$a = 2\text{sen}(t) - 3t^2 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

calcula su velocidad para un tiempo t.

c) ¿Cuál es la velocidad en $t = 2.0$ (s)?, ¿en $t = 4.0$ (s)?

11. Definiendo a la aceleración como la derivada de la velocidad respecto al tiempo

$$a = \frac{d\upsilon}{dt}$$

Calcula la velocidad en $t = 3$ (s) de una partícula que parte del reposo con una aceleración dada con la siguiente ecuación

$$a = 3t \text{ (m/s}^2\text{)}$$

12. En el movimiento de una partícula en una línea recta, la velocidad de la partícula es la derivada de su posición con respecto al tiempo

$$\upsilon = \frac{dx}{dt}$$

con el concepto de antiderivada podemos decir que el cambio de posición de la partícula es la antiderivada de la velocidad respecto al tiempo

$$\Delta x = \int \upsilon\,dt$$

Además, definimos a la aceleración como la derivada de la velocidad con respecto al tiempo

$$a = \frac{d\upsilon}{dt}$$

Si una partícula parte del reposo desde $x = 0$ (su velocidad es cero en $t = 0$ y $x = 0$) con una aceleración dada por

$$a = 12t^2 - 6.0t \text{ (m/s}^2\text{)}$$

calcula:

a) La función de velocidad para todo tiempo.
b) La velocidad en $t = 3.0$ (s).
c) La función de posición en todo tiempo.
d) La posición en $t = 3.0$ (s).

17 PROBLEMAS DE Trabajo y energía cinética

17.1 Problemas resueltos

1. Resuelve:

a) Si la velocidad υ_1 de una partícula de masa m_1 es el doble que la velocidad υ_2 de otra partícula de masa m_2, ¿cómo debe ser la relación entre sus masas para que la energía cinética de las partículas sea la misma?

Solución

Ya que la velocidad υ_1 es el doble que la velocidad υ_2, la masa m_1 debe ser menos que la masa m_2. Si la velocidad υ_1 es el doble, entonces υ_1^2 es cuatro veces υ_2^2 y por lo tanto la masa m_1 debe ser un cuarto de la masa m_2. Con ecuaciones tendríamos:

$$K_1 = K_2$$

$$\tfrac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 = \tfrac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2$$

pero $\upsilon_1 = 2\upsilon_2$, entonces

$$\tfrac{1}{2} m_1 (2\upsilon_2)^2 = \tfrac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2$$

$$4 m_1 \upsilon_2^2 = m_2 \upsilon_2^2$$

$$m_1 = \tfrac{1}{4} m_2$$

b) Si la masa m_1 de una partícula es el doble que la masa m_2 de otra partícula, ¿cómo debe ser la relación entre sus velocidades para que la energía cinética de las partículas sea la misma?

Solución

Tenemos

$$K_1 = K_2$$

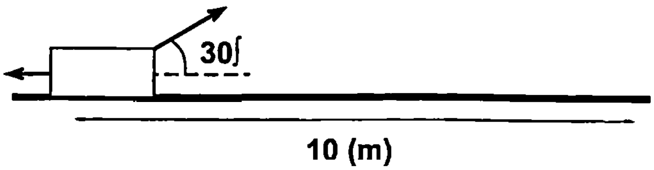
$$\tfrac{1}{2} m_1 \upsilon_1^2 = \tfrac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2$$

$$\tfrac{1}{2} (2m_2)^2 \upsilon_1^2 = \tfrac{1}{2} m_2 \upsilon_2^2$$

$$2\upsilon_1^2 = \upsilon_2^2$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2\upsilon_1}$$

2. Un bloque de masa m = 1.5 (kg) es movido 10 (m) hacia la derecha por dos fuerzas de magnitudes $F_1 = 20\,(\text{N})$ y $F_2 = 12\,(\text{N})$ como se muestra en la figura.



a) ¿Cuál es el trabajo hecho por cada fuerza?
Solución

$$W_{F1} = F_1 \cos(30°)(10\,(\text{m})) = 1.7\times10^2\ (\text{J})$$
$$W_{F2} = -F_2(10\,(\text{m})) = -1.2\times10^2\ (\text{J})$$

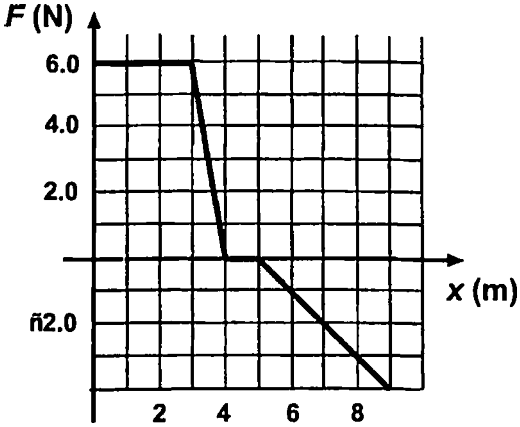
b) ¿Cuál es el trabajo neto sobre el objeto?
Solución

$$W_{neto} = W_{F1} + W_{F2} = 53\,(\text{J})$$

c) Si el objeto parte del reposo, ¿cuál es su velocidad después de avanzar 10 metros?
Solución

$$W_{neto} = \Delta K = \tfrac{1}{2}m\upsilon_f^2 - \tfrac{1}{2}m\upsilon_i^2 = \tfrac{1}{2}m\upsilon_f^2$$
$$\upsilon_f = \sqrt{\tfrac{2W_{neto}}{m}} = \sqrt{\tfrac{2(53)}{1.5}} = 8.4 \quad (\text{m/s})$$

3. Una partícula de masa m = 2.0 (kg) se mueve en un eje horizontal y se le aplica una sola fuerza variable como la muestra la siguiente figura



Si la partícula lleva una velocidad de 3.0 (m/s) cuando pasa por el origen, calcula:

a) La velocidad en x = 4.0 (m).

Solución

Trabajo de $x = 0$ a $x = 4.0$ es el área bajo la curva, es decir,

$$W_{0\to4} = (6.0\,(\mathrm{N}))\,(3.0\,(\mathrm{m})) + \frac{(6.0\,(\mathrm{N}))\,(1.0\,(\mathrm{m}))}{2} = 21\,(\mathrm{J})$$

entonces, la velocidad se calcula con el teorema del trabajo y la energía cinética,

$$W_{0\to4} = \Delta K = K_4 - K_0$$

$$K_4 = K_0 + W_{0\to4} = \tfrac{1}{2} m v_0^2 + 21 = 30\ (\mathrm{J})$$

$$\tfrac{1}{2} m v_4^2 = 30\,(\mathrm{J})$$

$$v_4 = \sqrt{\frac{2(30)}{2.0}} = 5.5\ (\mathrm{m/s})$$

b) La velocidad en $x = 5.0$ (m).

Solución

Trabajo de $x = 4.0$ a $x = 5.0$ (m) es cero, por lo tanto no hay cambio de energía cinética de $x = 4.0$ a $x = 5.0$ (m). La velocidad en $x = 5.0$ (m) es la misma que en $x = 4.0$ (m) $v_4 = v_5 = 5.5$ [m/s].

c) La velocidad en $x = 9.0$ (m).

Solución

Trabajo de $x = 5.0$ a $x = 9.0$ es el área bajo la curva, es decir,

$$W_{5\to9} = -\frac{(4.0\,(\mathrm{N}))\,(4.0\,(\mathrm{m}))}{2} = -8.0\,(\mathrm{J})$$

entonces, la velocidad se calcula con el teorema del trabajo y la energía cinética,

$$W_{5\to9} = \Delta K = K_9 - K_5$$

$$K_9 = K_5 + W_{5\to9} = \tfrac{1}{2} m v_5^2 - 8.0 = 22\ (\mathrm{J})$$

$$\tfrac{1}{2} m v_9^2 = 22\,(\mathrm{J})$$

$$v_4 = \sqrt{\frac{2(22)}{2.0}} = 4.7\ (\mathrm{m/s})$$

4. Potencia.

a) El trabajo que hace una máquina en función del tiempo se representa por medio de $W = 3.0t^2 - 5.0t$ (J). Calcula la potencia instantánea en $t = 2.0$ (s).

Solución

$$P = \frac{dW}{dt} = 6.0t - 5.0\ (\mathrm{J/s})$$

En t = 2.0 (s), la potencia es

$$P = 6.0(2.0) - 5.0 = 7.0 \text{ (W)}$$

b) La potencia instantánea de una máquina en función del tiempo se representa por medio de $P = 3.0t^2$ (W). Calcula el trabajo que hace esta máquina entre t =2.0 y t = 4.0 (s).

Solución

$$W = \int_{2.0}^{4.0} P dt = \int_{2.0}^{4.0} 3.0t^2 dt = 3.0 \frac{t^3}{3}\Big|_{2.0}^{4.0} = 1.0\left(4.0^3 - 2.0^3\right) = 56 \text{ (J)}$$

17.2 Problemas propuestos

1. ¿Qué fuerza constante debe ejercer el motor de un automóvil cuya masa es de 1600 [kg] para que aumente su velocidad de 10 (km/h) a 60 (km/h) en 6.0 (s)? ¿Cuál es la potencia media del motor?

2. La fuerza ejercida sobre un objeto que se mueve en línea horizontal está dada por $F(x) = 3x^2$ (N) donde x está en metros. Si su velocidad en x = 2.00 (m) es de 6.00 (m/s) y en x = 4.00 (m) es de 10.0 (m/s), calcula la masa de la partícula.

3. Una partícula de masa m = 2.37 (kg) se mueve en el eje x con una ecuación de movimiento

$$x(t) = 2.12t^2 + 3.19t - 7.98 \text{ (m)}$$

donde el tiempo está medido en (s).

a) Calcula la velocidad de la partícula en t = 1.00 (s).
b) Calcula la velocidad de la partícula en t = 3.00 (s).
c) Calcula la energía cinética de la partícula en t = 1.00 (s).
d) Calcula la energía cinética de la partícula en t = 3.00 (s).
e) Calcula el trabajo total realizado sobre esta partícula entre t = 1.00 (s) y t = 3.00 (s).

4. Una partícula de masa 1.3 (kg) que está ubicada en un punto A: (2, 3, 4) lleva una velocidad $\vec{v}_A = 3.7\hat{i} - 2.6\hat{j} - 9.0\hat{k}$; después de 5.0 (s) esta partícula se encuentra en un punto B: (–8, 0, 2) con una velocidad $\vec{v}_B = 3.7\hat{i} - 2.6\hat{j} - 9.0\hat{k}$. Calcula el trabajo realizado sobre la partícula en ese tiempo.

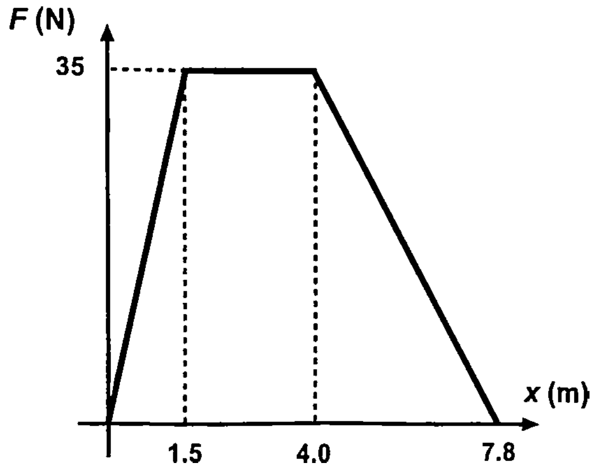
5. Conocemos la potencia instantánea de una máquina

$$P(t) = 3.0t^2 \text{ (W)}$$

a) Calcula el trabajo realizado por la máquina entre t = 0 y t = 8.0 (s).
b) Si este trabajo es utilizado para mover un objeto de masa 1.0 (kg) desde el reposo, ¿qué velocidad alcanzará este objeto en t = 8.0 (s)?

6. Un automóvil de 1.2×10^3 (kg) viaja a 87 (km/h). Se aplica una fuerza constante con el fin de detener el vehículo; éste se detiene en 1.4×10^2 (m). ¿Cuál es el valor de la fuerza aplicada?

7. La fuerza que actúa sobre una masa de 3.0 (kg) está representada por la siguiente gráfica



Si la partícula lleva una velocidad de 2.0 (m/s) en $x = 1.5$ (m),

a) Calcula la velocidad de la partícula en $x = 4.0$ (m).
b) Calcula la velocidad de la partícula en $x = 7.8$ (m).

8. Sobre una partícula de masa $m = 2.50$ (kg) se ejerce sólo una fuerza dada por la siguiente ecuación

$$F = 2.00x - 3.00x^2 \text{ (N)}$$

Si medimos su velocidad en $x = 4.00$ (m) y es de $\upsilon = 6.50$ (m/s),

a) ¿Cuál debió haber sido su velocidad en $x = 2.00$ (m)?
b) ¿Y su velocidad en el origen?

9. Sobre una partícula de masa $m = 1.50$ (kg) se ejerce sólo una fuerza dada por la siguiente ecuación

$$F = 1.00x^2 - 3.00x \text{ (N)}$$

Si medimos su velocidad en $x = 1.00$ (m) y es de $\upsilon = 2.00$ (m/s),

a) ¿Cuál es su velocidad en $x = 5.00$ (m)?
b) Calcula una fuerza constante que produzca el mismo cambio en la velocidad de la partícula en el intervalo dado.

10. Una partícula de masa $m = 2.00$ (kg) se mueve con la siguiente función de posición

$$x(t) = 2.00t^3 - 3.00t^2 \text{ (m)}$$

Calcula:

a) El trabajo que se hace sobre la partícula desde $t = 0$ a $t = 2.00$ (s).
b) La potencia media de la fuerza que la mueve en ese intervalo.

11. Un automóvil de masa $m = 1.35\times10^3$ (kg) viaja a una velocidad υ = 70.0 (km/h). Se aplica una fuerza constante con el fin de detener el auto. Éste se detiene 85.5 (m) después.

a) ¿Cuál es el valor de la fuerza aplicada?
b) En forma aproximada, calcula la potencia media de la fuerza aplicada.

12. Se tiene un vehículo moviéndose a 50.0 (km/h). ¿Cuál debe ser la fuerza promedio que debemos aplicar al vehículo, con $m = 1.0\times10^3$ (km) para que se detenga 8.0 (s)?

13. Un karateka está haciendo pruebas partiendo ladrillos apilados con su mano. Con bastante facilidad parte un ladrillo, pero decide impartirle el doble de velocidad la siguiente vez. Un estudiante de física remedial le recomienda que también se ponga algo pesado en el puño para partir un mayor número de ladrillos. ¿Qué masa debe tener el objeto que empuñará para que logre romper al menos 5 bloques? (Dato: masa de la mano = m)

14. La potencia instantánea de una máquina está dada por la expresión

$$P(t) = 50.0e^{-t/3}$$

a) Calcula aproximadamente cuál es el trabajo realizado por la máquina entre t = 2.0 (s) y t = 6.0 (s).
b) Si ese trabajo se realiza sobre un objeto de 2.0 (kg) que está en reposo en t = 2.0 (s), ¿qué velocidad alcanzaría?